Série A,
N° 4235
N° d'ordre :
5086

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jacques GREMILLET

1re THÈSE. — Propagation des ondes métriques et décamétriques dans les semi-conducteurs en présence d'une induction magnétique continue ; effet « hélicon ».

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 18 mars 1964 devant la Commission d'examen.

MM. GRIVET *Président.*
AIGRAIN, BOK *Examinateurs.*
OLMER *Invité.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR
Quai des Grands-Augustins, 55

1964

Série A,
N° 4235
N° d'ordre :
5086

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jacques GREMILLET

1re THÈSE. — Propagation des ondes métriques et décamétriques dans les semi-conducteurs en présence d'une induction magnétique continue ; effet « hélicon ».

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 18 mars 1964 devant la Commission d'examen.

MM. GRIVET *Président.*
AIGRAIN, BOK *Examinateurs.*
OLMER *Invité.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR
Quai des Grands-Augustins, 55

1964

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

JULIA (G.).....	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.
GRASSÉ.....	T	Évolution des Êtres organisés.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.
WYART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
TEISSIER.....	T	Zoologie.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale (Orsay).
AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER.....	T	Physiologie générale.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).
CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.).
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.
DRACH.....	T	Zoologie.
KASTLER.....	T	Physique (E. N. S.).
EPHRUSSI.....	T	Génétique.
RIVIÈRE.....	T	Géologie S. P. C. N. et Sédimentologie (Orsay).
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS (R.).....	T	Recherches physiques.
THOMAS (A.).....	T	Biologie cellulaire.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.
MORAND.....	T	Physique-Enseignement.
SOLEILLET.....	T	Physique (P. C. B.).
FORTIER.....	T	Mécanique Expérimentale des Fluides.
PETIT.....	T	Biologie maritime.
QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN.....	T	Embryologie.
EICHHORN.....	T	Botanique.
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mlle CAUCHOIS.....	T	Chimie physique.
THELLIER.....	T	Physique du Globe.
L'HÉRITIER.....	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET.....	T	Radioélectrciité (Orsay).
PONCIN.....	T	Mécanique générale.
DUBREIL.....	T	Arithmétique et Théorie des Nombres.
QUELET.....	T	Chimie organique.
CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER.....	T	Micropaléontologie.
JUNG.....	T	Géologie.
TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN.....	T	Chimie organique et structurale.
JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).
VASSY.....	T	Physique de l'Atmosphère.
DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.
AMIEL.....	T	Chimie générale.
HOCART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
MATHIEU (J.-P.).....	T	Physique optique.
COUTEAUX.....	T	Cytologie.
MAY.....	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET.....	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN.....	T	Biologie végétale marine.
GUINIER.....	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST.....	T	Physiologie comparée.
FORTET.....	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
MALAVARD.....	T	Aviation (Techniques aéronautiques).
BRELOT.....	T	Calcul différentiel et intégral.
NORMANT.....	T	Synthèse organique.
BÉNARD.....	T	Chimie minérale.
BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
DUGUÉ.....	T	Statistiques mathématiques.
SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
ULRICH.....	T	Physiologie végétale appliquée.
MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.
KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD.....	T	Botanique.
Mlle LE BRETON.....	T	Physiologie de la Nutrition.
LELONG.....	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
DEVILLERS.....	T	Anatomie et Hist. comparées.
EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
FRANCON.....	T	Physique (S. P. C. N.).
GLANGEAUD.....	T	Géographie physique et Géologie.
GODEMENT.....	T	Mathématiques (M. G. P.).
PISOT.....	T	Technique mathématique de la Physique.
ROCH.....	T	Géologie.
SCHATZMANN.....	T	Astrophysique.
TERMIER.....	T	Géologie générale.
ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales.
LENNUIER.....	T	Physique (M. G. P.).
RIZET.....	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER.....	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT.....	T	Physique théorique.
DIXMIER.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
SOUCHAY.....	T	Chimie générale.
AIGRAIN.....	T	Électrotechnique générale.
BRUSSET.....	T	Chimie systématique.
LÉVY (M.).....	T	Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
Mme CHAIX.....	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
PIAUX.....	T	Chimie (M. P. C.).
BRUN.....	T	Mécanique théorique des Fluides.
LEDERER.....	T	Chimie biologique (Orsay).
Mme DUBREIL.....	T	Mathématiques (Agrégation).
Mme LELONG.....	T	Mathématiques II (E. N. S.).
BELLAIR.....	T	Géologie (S. P. C. N.).
COTTE.....	T	Physique-IÉectricité.
DUBOIS (J.-E.).....	T	Chimie organique.
LAMOTTE.....	T	Zoologie (E. N. S.).
MICHEL (A.).....	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER.....	T	Énergétique générale.
ROUAULT.....	T	Électricité (Orsay).
GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ.....	T	Chimie physique.
BROSSEL.....	T	Physique atomique.
BUSER.....	T	Physiologie comparée.
CAMUS.....	T	Physiologie végétale (Orsay).
CASTAING.....	T	Physique II. Thermo. (Orsay).
CURIEN.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE.....	T	Physiologie végétale (Orsay).
NOIROT.....	T	Évolution des Êtres organisés.
PANNETIER.....	T	Chimie générale.
POSSOMPES.....	T	Zoologie.
PULLMANN.....	T	Chimie quantique.
TEILLAC.....	T	Physique nucléaire et Radioactivité (Orsay).
TONNELAT.....	T	Biologie physicochimique (Orsay).
VILLE.....	T	Économétrie.
WILLEMART.....	T	Chimie (P. C. B.).
DODE.....	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN.....	T	Recherches physiques.
GUINOCHET.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.) (Orsay).
ROLLET.....	T	Chimie minérale.
Mlle JOSIEN.....	T	Chimie (S. P. C. N.).
CHEVALLEY.....	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT.....	T	Électronique (Orsay).
CHAPELLE.....	T	Physique I (Orsay).

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
DENY	T	Mathématiques générales (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des Fluides.
LUCAS (G.)	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales (Orsay).
BRICARD	T	Météorologie et Physique de l'Atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie.
FRIEDEL	T	Physique des solides (Orsay).
JULIA (M.)	T	Études des Moléculaires complexes.
LENDER	T	Biologie animale (S. P. C. N.) (Orsay).
MAGAT	T	Physicochimie des radioéléments.
Mlle QUINTIN	T	Électrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
BENOIST	T	Physiologie animale (Orsay).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
LEMÉE	T	Écologie végétale (Orsay).
GUÉRIN	T	Chimie (M. P. C.) (Orsay).
CHATELET (M.)	T	Chimie (P. C. B.)
JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique (S. P. C. N.).
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).
BERTEIN	T	Électronique (Orsay).
BOUISSIÈRES	T	Radiochimie.
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Mécanique physique.
ELLENBERGER	T	Géologie des grandes régions du Globe.
FRANC	T	Biologie animale (P. C. B.).
SCHNELL		Botanique tropicale.
STOLKOWSKI	T	Physiologie végétale.
ACHER	T	Chimie biologique.
BAUDOIN		Biologie animale (P. C. B.).
BEAUMONT		Biologie animale (S. P. C. N.).
BLAMONT	T	Géophysique-Ionosphère.
BOURREAU	T	Botanique.
CURIE (D.)		Physique (M. G. P.).
DURAND-DELGA	T	Géologie.
FRÉON	T	Chimie organique (Orsay).
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des Probabilités.
CAILLEUX	T	Géologie (S. P. C. N.).
MAGNAN	T	Physique (S. P. C. N.).
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Mlle VEIL	T	Physiologie générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale.
LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
BROCHARD	T	Physique P. C. B. (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Mathématiques I (Orsay).
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
CAIRE		Géographie physique et Géologie dynamique.
COMOLET	T	Mécanique des Fluides.
CORABŒUF	T	Physiologie animale (Orsay).
DELLOUE		Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie animale (P. C. B.).
JULLIEN (J.)		Chimie (S. P. C. N.) (Orsay).
MALGRANGE	T	Technique mathématique de la Physique (Orsay).
OLIVIER		Antropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE	T	Physique (E. N. S.) (Orsay).
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T	Mathématiques (E. N. S.) fémin.
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Mécanique céleste.
ABELÈS		Physique (S. P. C. N.).
AMAT	T	Physique (P. C. B.).
AUBOIN	T	Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
BOUGIS		Biologie marine (Villefranche-sur-Mer).
BRUHAT	T	Mathématiques (M. P. C.).
BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
CHABBAL	T	Physique (M. G. P.) (Orsay).
DEHEUVELS	T	Mathématique propédeutique.
D'ESPAGNAT	T	Physique théorique (Orsay).
FURON	T	Géologie (S. P. C. N.).
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVÈS		Biologie végétale (P. C. B.).
GUILBERT		Physique (C. U. S. Orléans).
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie (P. C. B.).
MEYER		Physique propédeutique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER		Pétrographie.
ROSEAU	T	Mécanique théorique des Fluides.
ROUBINE	T	Électronique.
SILBER	T	Chimie (P. C. B.).
UEBERSFELD	T	Électronique.
YVON	T	Théories physiques.
HERVÉ	T	Mathématiques.
NÉRON	T	Mathématiques (M. P. C.) (Orsay).
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique.
BALKANSKY		Physique (M. P. C.).
LE CORRE	T	Électricité.
DELCROIX	T	Physique théorique (Orsay).
GOURDIN		Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
LEHMANN	T	Physique expérimentale des Hautes Énergies (Orsay).
NATAF	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
ÉCHALIER		Biologie animale (P. C. B.).
BARRAUD		Physiologie cellulaire.
LIORET		Physiologie végétale (Orsay).
DARS		Géologie structurale et Géologie appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (Agrégation).
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle.
BLAQUIÈRE		Électronique (Orsay).
ARNOUS	T	Physique théorique.
TATIBOUET		Chimie (C. S. U. Orléans).
MALLIAVIN	T	Mathématique propéd. (Orsay).
GAUDÉMAR		Chimie propédeutique.
PEREZ Y JORBA		Physique expérimentale des Hautes Énergies (Orsay).
DAVID	T	Chimie (Agrégation, Orsay).
BROUSSE	T	Mécanique théorique.

Secrétaire général ..... R. POULLAIN.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550011_0037

PROPAGATION DES ONDES MÉTRIQUES ET DÉCAMÉTRIQUES DANS LES SEMI-CONDUCTEURS EN PRÉSENCE D'UNE INDUCTION MAGNÉTIQUE CONTINUE, EFFET « HÉLICON » (1)

PAR J. GRÉMILLET,

Département de Recherches Physico-Chimiques
de la CSF Compagnie générale de télégraphie Sans Fil.

PREMIÈRE PARTIE.

SOMMAIRE. — *Cette étude concerne la propagation des ondes électromagnétiques dans les semi-conducteurs soumis à l'influence d'une induction magnétique dans la gamme des ondes métriques et décamétriques. En raison de l'existence d'un plasma de porteurs de charges électriques dans le solide, des phénomènes d'anisotropie de propagation sont à prévoir et ont effectivement été trouvés à* 10 000 MHz *dans* In Sb *et dans les métaux à très basses fréquences et basse température.*

Cette première publication comporte deux parties :

— Dans la première, on effectue l'analyse de la propagation dans le cas très général où les porteurs ont une masse apparente anisotrope, l'induction magnétique une direction quelconque ainsi que le plan de polarisation de l'onde. Elle conduit à affirmer l'existence de deux vecteurs de propagation différents pour des ondes à polarisation elliptique de sens inverses. Le cas particulier où la masse des porteurs est isotrope et le plan de polarisation perpendiculaire à l'induction magnétique est ensuite détaillé, comme devant servir de modèle théorique pour l'expérimentation. Cette première partie est donc essentiellement théorique.

— La deuxième partie est consacrée à la mise en évidence des effets d'anisotropie par des expériences qualitatives; elle est essentiellement expérimentale et démontre l'existence effective de l'effet cherché dans In Sb *à la température ambiante, dans une gamme de fréquence s'étendant de* 30 *à* 1000 MHz.

Dans une seconde publication on donnera des résultats expérimentaux suffisamment précis pour une confrontation chiffrée avec la théorie ainsi qu'un exemple d'application pratique sous forme d'un isolateur fonctionnant à 30 MHz. (C. D. U. : 539.2 : 537.311.)

SUMMARY. — *This investigation is concerned with the propagation of electromagnetic waves in semi-conductors subjected to the influence of magnetic induction in the metric and decametric band. On account of the existence of a plasma of electric charge carriers in the solid, propagation anisotropy phenomena are to be expected and have actually been observed at* 10 000 Mc/s *in* In Sb *and in metals at very low frequency and low temperature.*

This first article is in two parts :

— In part I, propagation is analysed in the very general case in which the carriers have an apparent anisotropic mass, magnetic induction and polarization being in any direction.

(1) Manuscrit reçu le 10 février 1964.

It permits asserting the existence of two different propagation vectors for waves elliptically polarized in opposite directions. A detailed examination is made of the special case where the carrier mass is isotropic and the plane of polarization perpendicular to the magnetic induction. Part I is thus essentially theoretical.

— In part II, anisotropic effects are brought out by qualitative experiment; it is essentially experimental and shows the actual existence of the effect sought in In Sb *at room temperature, over a frequency band extending from* 30 *to* 1000 Mc/s.

In a future article experimental results will be given, these being sufficiently precise for comparing the values obtained with theoretical values, together with an example of practical application in the form of an isolator operating at 30 Mc/s. (U. D. C. : 539.2 : 537.311.)

Inhaltsangabe. — *Diese Untersuchung betrifft die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in Halbleitern, die sich unter dem Einfluss eines Magnetfeldes befinden, und zwar im Frequenzbereich der Kurz- und Ultrakurzwellen. Infolge der Anwesenheit eines Ladungsträgerplasma im Festkörper kann eine gewisse Anisotropie der Fortpflanzung der Wellen vorhergesagt werden — diese Effekte sind in der Tat bereits bei* 10 000 MHz *in* In Sb *sowie in Metallen bei sehr teifen Frequenzen und teifen Temperaturen beobachtet worden.*

Die Voruntersuchung ist in zwei Teile aufgegliedert :

— Im ersten Teil wird die Fortpflanzung im ganz allgemeinen Fall untersucht, und zwar mit folgenden Bedingungen : Ladungsträger mit einer anisotropen, scheinbaren Masse, beliebige Ausrichtung des Magnetfeldes in bezug auf die Polarisierungsebene der Wellen. Diese Untersuchung zeigt, dass es zwei verschiedene Foripflanzungs vektoren gibt, und zwar für elliptisch polarisierte Wellen mit entgegengesetzter Polarisationsrichtung. Dann wird eingehend der Fall untersucht, bei welchem die Masse der Ladungsträger isotrop ist und die Polarisationsebene senkrecht zum Magnetfeld steht. Dieser Fall soll als theoretisches Modell für die experimentelle Untersuchung dienen.

Dieser erste Teil besteht also wesentlich aus einer theoretischen Untersuchung.

— Der zweite Teil wird qualitativen Experimenten gewidmet die dazu dienen sollen, diesen Anisotropieeffekt zu zeigen. Es handelt sich wesentlich um experimentelle Versuche, die das effektive Vorhandensein dieses Effektes in InSb *bei Umgebungstemperatur und in einem Frequenzbereich zwischen* 30 *und* 1000 MHz *bestätigen.*

In einem späteren Aufsatz werden dann genauere experimentelle Resultate gebracht, die eine zahlenmässige Gegenüberstellung mit der Theorie ermöglichen sowie ein praktisches Anwendungsbeispiel in Form eines sog. « Isolators » für eine Betriebsfrequenz von 30 MHz. (D. K. : 539.2 : 537.311.)

1. APERÇU INTUITIF DE L'EFFET « HÉLICON ».

1.1. Aperçu intuitif de l'effet « Hélicon ».

Soit une onde électromagnétique se propageant dans un milieu quelconque. Sa progression peut être imaginée comme suit :

L'existence de l'énergie localisée en un point se traduit par la présence en ce point d'un champ électrique et d'un champ magnétique. En raison de la présence du champ électrique il existe une densité de courant en ce point (courant de déplacement si le milieu est diélectrique sans perte, somme du courant de déplacement et d'autres courants dans les cas différents). Le courant induit à son tour en un autre point un champ magnétique, ce qui implique la présence en ce nouveau point d'énergie électromagnétique, d'où champ électrique, etc. La nature de la propagation dépend donc essentiellement de la densité de courant en chaque point.

Soit alors un semi-conducteur soumis à une induction magnétique continue seule. Les porteurs libres sont alors soumis à l'effet cyclotron ([2]) et exécutent en particulier un mouvement de rotation dans un plan donné et dans un sens donné. Si un champ électrique continu $\mathbf{E}$ perpendiculaire à l'induction magnétique continue $\boldsymbol{B}$ est superposé, il apparaît la densité de courant de conduction $\mathbf{j}_1 = \sigma\mathbf{E}$, colinéaire avec $\mathbf{E}$ (pour cet examen quasi intuitif, la conductivité est supposée scalaire) et la densité de courant de Hall $\mathbf{j}_2$ perpendiculaire à $\mathbf{E}$ et $\boldsymbol{B}$. Dû à une force de Lorentz, ce courant de Hall est d'autant plus grand que la mobilité des porteurs considérés est grande et que B est grand; son sens dépend de celui

([2]) Annexe I.

de la rotation cyclotron et donc de l'orientation de $\boldsymbol{B}$. En conséquence, si le produit μB est élevé, $\mathbf{j}_2$ peut devenir beaucoup plus grand que $\mathbf{j}_1$ et en première approximation, l'équilibre s'obtient avec $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{B}$ et la densité de courant totale $\mathbf{j}$ formant pratiquement un trièdre trirectangle.

Cette analyse reste à peu près valable en champ électrique $\mathbf{E}$ variable avec le temps tant que $\mathbf{E}$ reste sensiblement constant durant une révolution complète cyclotron, c'est-à-dire si la pulsation ω de $\mathbf{E}$ est faible devant la pulsation « cyclotron » ω_c. Reprenant alors la propagation d'une telle onde dans la direction de $\boldsymbol{B}$, il s'ensuit qu'à $\mathbf{E}$ correspond une densité de courant $\mathbf{j}$ perpendiculaire, qui engendre un champ magnétique $\mathbf{H}$ perpendiculaire à $\mathbf{j}$ donc parallèle à $\mathbf{E}$, champ magnétique auquel est associé le champ électrique $\mathbf{E}'$ perpendiculaire à $\mathbf{H}$, donc à $\mathbf{E}$. Cela n'est possible que si au cours de la propagation, $\mathbf{E}$ est un vecteur tournant dans un sens bien précis déterminé par l'orientation relative du champ électrique et de la densité du courant de Hall en chaque point.

En conséquence :

— si $\omega \ll \omega_c$ (existence d'un effet Hall non perturbé);

— si $\mu B \gg 1$ (prédominance du courant de Hall) [3] il faut s'attendre à ce que l'énergie se propage sous forme d'one onde polarisée elliptiquement dans un sens bien déterminé. L'onde s'enfonce en tournant dans le matériau d'où le nom d'effet « Hélicon » donné à ce phénomène par P. Aigrain [1].

1.2. Mise en forme mathématique de l'effet « Hélicon ».

1.2.1. Généralités.

Le comportement d'une onde électromagnétique se propageant dans un milieu donné est régi par les équations de Maxwell :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

où, avec les notations usuelles :

$\mathbf{E}$ désigne le champ électrique;
$\mathbf{H}$ » le champ magnétique;
$\mathbf{D}$ » l'induction électrique;
$\mathbf{B}$ » l'induction magnétique;
$\mathbf{j}$ » la densité de courant.

Dans toute la suite, il sera admis que les semiconducteurs sont caractérisés par une constante diélectrique ε_R et un coefficient de perméabilité μ scalaires. En pratique l'expérimentation est effectuée sur In Sb pour lequel la constante diélectrique relative vaut 17 [5] et $\mu \# \mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ F/m [6].

En se limitant au régime sinusoïdal et ulilisant la notation conventionnelle des vecteurs complexes :

$$\mathbf{V} = \text{partie réelle de } \boldsymbol{\mathcal{V}}\, e^{j\omega t},$$

le problème consiste à résoudre le système

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_0 \boldsymbol{\mathcal{H}}, \\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathbf{j} + j\omega\varepsilon_R \boldsymbol{\mathcal{E}} \end{cases}$$

et la détermination des solutions dépend de l'évaluation de $\mathbf{j}$, densité de courant. Par définition même, $\mathbf{j}$ est directement liée à la vitesse des porteurs de charges mobiles (électrons et trous de conduction) par la relation

$$(2) \qquad \mathbf{j} = nq_n \mathbf{v}_n + pq_p \mathbf{v}_p,$$

où

n désigne la densité d'électrons dans la bande de conduction;
p désigne la densité de trous dans la bande de valence;
q_n, $q_p = \pm 1{,}6 . 10^{-19}$ Cb (plus généralement charge algébrique du porteur);
$\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_p$, vitesses (respectivement) des électrons et des trous.

La détermination de la densité de courant s'effectuera donc par le calcul de la vitesse moyenne des porteurs.

1.2.2. Densité de courant associée a un porteur de charge électrique q.

Les axes de référence [4] sont choisis de façon à rendre diagonale la matrice de masse du porteur considéré, soit

$$\left(\frac{1}{m}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{pmatrix},$$

les axes 1, 2 et 3 étant orthogonaux. Sous la double influence d'un champ électromagnétique à la pulsation ω et d'une induction continue $\boldsymbol{B}$, le mouvement

[3] μB grand permet de négliger le courant de conduction devant le courant de Hall; il faudra en outre que le courant de déplacement soit également négligeable.

[4] *Voir* Annexe I pour la justification et la forme matricielle des équations utilisées.

du porteur est régi par l'équation (3) (équation fondamentale de la dynamique en régime sinusoïdal, vecteurs complexes)

$$(3)\quad j\omega(\boldsymbol{\mathcal{V}}) = q\left(\frac{1}{m}\right)\cdot(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathbf{v}\wedge[\boldsymbol{B}+\boldsymbol{\mathcal{B}}]) - \left(\frac{\mathbf{v}}{\tau}\right).$$

Les ordres de grandeurs sont tels que dans tous les cas $\mathcal{B}$, induction magnétique associée au champ électromagnétique est négligeable devant l'induction magnétique continue superposée $\boldsymbol{B}$. Le terme $\left(\frac{\mathbf{v}}{\tau}\right)$ représente un terme de « frottement » dû aux diverses collisions subies par le porteur lors de son déplacement dans le cristal (modèle de Drude Zener).

En explicitant l'équation (3), il vient successivement :

$$a.\qquad [1+j\omega\tau](\boldsymbol{\mathcal{V}}) = q\tau\left(\frac{1}{m}\right)(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathbf{v}\quad\boldsymbol{B});$$

$$b.\quad [1+j\omega\tau]\left(\frac{1}{m}\right)^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{V}}) = q\tau\,(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathbf{v}\quad\boldsymbol{B});$$

$$\begin{pmatrix} [1+j\omega\tau]m_1 & 0 & 0 \\ 0 & [1+j\omega\tau]m_2 & 0 \\ 0 & 0 & [1+j\omega\tau]m_3 \end{pmatrix}(\boldsymbol{\mathcal{V}}) = q\tau(\boldsymbol{\mathcal{E}}) + q\tau\begin{pmatrix} 0 & \gamma\boldsymbol{B} & -\beta\boldsymbol{B} \\ -\gamma\boldsymbol{B} & 0 & \alpha\boldsymbol{B} \\ \beta\boldsymbol{B} & -\alpha\boldsymbol{B} & 0 \end{pmatrix}(\boldsymbol{\mathcal{V}}),$$

expression dans laquelle $\boldsymbol{B}$, α, β, γ représentent respectivement module et cosinus directeurs (par rapport aux axes choisis) de $\boldsymbol{B}$.

Il est immédiat d'en tirer, suivant les règles d'addition et d'inversion des matrices, la valeur de $(\boldsymbol{\mathcal{V}})$ en fonction de $(\boldsymbol{\mathcal{E}})$:

$$(4)\quad (\boldsymbol{\mathcal{V}}) = \frac{q\tau}{m_1 m_2 m_3[1+j\omega\tau]}\times\begin{pmatrix} [1+j\omega\tau]^2 m_2 m_3 + \alpha^2 q^2 B^2\tau^2 & [1+j\omega\tau]\gamma m_3 qB\tau + \alpha\beta q^2 B^2\tau^2 & -[1+j\omega\tau]\beta m_2 qB\tau + \alpha\gamma q^2 B^2\tau^2 \\ -[1+j\omega\tau]\gamma m_3 qB\tau + \alpha\beta q^2 B^2\tau^2 & [1+j\omega\tau]^2 m_1 m_3 + \beta^2 q^2 B^2\tau^2 & [1+j\omega\tau]\alpha m_1 qB\tau + \beta\gamma q^2 B^2\tau^2 \\ [1+j\omega\tau]\beta m_2 qB\tau + \alpha\gamma q^2 B^2\tau^2 & -[1+\omega\tau]\alpha m_1 qB\tau + \beta\gamma q^2 B^2\tau^2 & [1+j\omega\tau]^2 m_1 m_2 + \gamma^2 q^2 B^2\tau^2 \end{pmatrix}(\boldsymbol{\mathcal{E}}).$$

Expression dans laquelle ω_c désigne la pulsation cyclotron (3) :

$$\omega_c = qB\left[\frac{\alpha^2 m_1 + \beta^2 m_2 + \gamma^2 m_3}{m_1 m_2 m_3}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si n est le nombre de porteurs de charge q caractérisés par la même masse $\left(\frac{1}{m}\right)$, la densité de courant relative à ces porteurs est

$$(\mathbf{j}) = nq(\boldsymbol{\mathcal{V}}).$$

Tout se passe donc comme si le corps semi-conducteur était affecté d'une conductivité matricielle (σ) :

$$(5)\qquad (\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_1' & \sigma_1'' \\ \sigma_2 & \sigma_2' & \sigma_2'' \\ \sigma_3 & \sigma_3' & \sigma_3'' \end{pmatrix}(\boldsymbol{\mathcal{E}}),$$

les éléments de (σ) étant immédiatement déductibles des équations (4) et (5).

Avant d'aller plus loin dans la recherche des solutions des équations de Maxwell, il convient d'examiner l'expression obtenue pour $\mathbf{j}$, ceci en décomposant la matrice de conductivité obtenue. Naturellement, celle-ci se sépare en éléments traduisant la conductivité en l'absence de $\boldsymbol{B}$, puis en termes supplémentaires dus à $\boldsymbol{B}$. C'est ainsi qu'il est possible d'écrire :

$$(\mathbf{j}) = \frac{nq^2\tau}{m_1 m_2 m_3}\,\frac{1}{[1+j\omega\tau][(1+j\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2]}\times\left[\begin{pmatrix} [1+j\omega\tau]^2 m_2 m_3 & 0 & 0 \\ 0 & [1+j\omega\tau]^2 m_1 m_3 & 0 \\ 0 & 0 & [1+j\omega\tau]^2 m_1 m_2 \end{pmatrix} + [1+j\omega\tau]qB\tau\begin{pmatrix} 0 & \gamma m_3 & -\beta m_2 \\ -\gamma m_3 & 0 & \alpha m_1 \\ \beta m_2 & -\alpha m_1 & 0 \end{pmatrix} + q^2 B^2\tau^2\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}\right](\boldsymbol{\mathcal{E}})$$

$\mathbf{j}$ *se présente donc sous la forme de la somme de trois densités de courant*

$$(\mathbf{j}) = (\mathbf{j}_1) + \mathbf{j}_2 + (\mathbf{j}_3)$$

dont l'interprétation illustre bien le comportement

(3) Ici algébrique, q pouvant être >0 ou <0.

des porteurs dans le matériau; en effet

$$(\mathbf{j}_1) = \frac{nq^2\tau}{m_1 m_2 m_3}\,\frac{1}{[1+j\omega\tau]\,[(1+j\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2]}\begin{pmatrix}[1+j\omega\tau]^2 m_2 m_3 & 0 & 0\\ 0 & [1+j\omega\tau]^2 m_1 m_3 & 0\\ 0 & 0 & [1+j\omega\tau]^2 m_1 m_2\end{pmatrix}(\mathcal{E})$$

$$= \frac{1}{1+\left[\dfrac{\omega_c\tau}{1+j\omega\tau}\right]^2}\begin{pmatrix}\dfrac{nq^2\tau}{m_1(1+j\omega\tau)} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{nq^2\tau}{m_2(1+j\omega\tau)} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{nq^2\tau}{m_2(1+j\omega\tau)}\end{pmatrix}(\mathcal{E}).$$

$\mathbf{j}_1$ *représente donc le courant de conduction usuel. Cependant son module et sa phase sont altérés par le champ magnétique (terme en facteur devant la matrice).*

$$(\mathbf{j}_2) = \frac{nq^2\tau}{m_1 m_2 m_3}\,\frac{[1+j\omega\tau]\,qB\tau}{[1+j\omega\tau]\,[(1+j\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2]} \times\begin{pmatrix}0 & \gamma m_3 & -\beta m_2\\ -\gamma m_3 & 0 & \alpha m_1\\ \beta m_2 & -\alpha m_1 & 0\end{pmatrix}(\mathcal{E}),$$

soit en introduisant le vecteur $\mathbf{u}$, de composantes αm_1, βm_2, γm_3 :

$$\mathbf{j}_2 = \frac{nq^2\tau}{m_1 m_2 m_3}\,\frac{qB\tau}{(1+j\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2}\,[\mathcal{E}\quad \mathbf{u}].$$

Il s'ensuit que $\mathbf{j}_2$ est (en revenant au vecteur réel) orthogonal à $\mathbf{u}$, vecteur perpendiculaire lui-même au plan de rotation cyclotron (Annexe I). $\mathbf{j}_2$ est en outre perpendiculaire au champ électrique $\mathbf{E}$, variable avec le temps; devant être ainsi orthogonal à deux vecteurs dont l'un est fixe et l'autre variable dans un plan de polarisation (6), $\mathbf{j}_2$ est donc en général un vecteur tournant dans le plan de rotation cyclotron, et ce, quelle que soit la position du plan de polarisation de l'onde électromagnétique.

En conclusion :

$\mathbf{j}_2$ *est représenté par un vecteur tournant dans le plan de rotation cyclotron.*

(6) Est défini ici comme « plan de polarisation » le plan contenant, en un point donné, l'extrémité du vecteur supposé polarisé elliptiquement en ce point.

$$(\mathbf{j}) = \frac{1}{j\omega}\,\frac{nq^2}{m_1 m_2 m_3}\,\frac{1}{\omega_c^2-\omega^2}\begin{pmatrix}-\omega^2 m_2 m_3+\alpha^2 q^2 B^2 & [j\omega\gamma m_3+\alpha\beta q B]\,qB & [-j\omega\beta m_2+\alpha\gamma q B]\,qB\\ [-j\omega\gamma m_3+\alpha\beta q B]\,qB & -\omega^2 m_1 m_3+\beta^2 q^2 B^2 & [j\omega\alpha m_1+\beta\gamma qB]\,qB\\ [j\omega\beta m_2+\alpha\gamma q B]\,qB & [-j\omega\alpha m_1+\beta\gamma q B]\,qB & -\omega^2 m_1 m_2+\gamma^2 q^2 B^2\end{pmatrix}(\mathcal{E}).$$

$$(\mathbf{j}_3) = \frac{nq^2\tau}{m_1 m_2 m_3}\,\frac{q^2\mathbf{B}^2\tau^2}{[1+j\omega\tau]\,[(1+j\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2]} \times\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma\\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2\end{pmatrix}(\mathcal{E}),$$

$$= \frac{nq^2\tau}{m_1 m_2 m_3}\,\frac{q^2\mathbf{B}^2\tau^2}{[1+j\omega\tau]\,[(1+j\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2]} \times\begin{pmatrix}\alpha\,[\alpha\mathcal{E}_1+\beta\mathcal{E}_2+\gamma\mathcal{E}_3]\\ \beta\,[\alpha\mathcal{E}_1+\beta\mathcal{E}_2+\gamma\mathcal{E}_3]\\ \gamma\,[\alpha\mathcal{E}_1+\beta\mathcal{E}_2+\gamma\mathcal{E}_3]\end{pmatrix},$$

soit

$$\mathbf{j}_3 = \frac{nq^2\tau}{m_1 m_2 m_3}\,\frac{q^2\tau^2}{[1+j\omega\tau]\,[(1+j\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2]}\,[\mathbf{B}.\mathcal{E}].\mathbf{B}.$$

$\mathbf{j}_3$ *est donc polarisé rectilignement suivant la direction de l'induction magnétique.*

$\mathbf{j}_2+\mathbf{j}_3$ représente donc dans le cristal une densité de courant polarisée en général elliptiquement.

En conclusion :

La densité de courant dans le cristal résulte de la superposition de la densité de courant due à la conductivité usuelle du matériau et d'une densité de courant, liée à l'existence de l'induction magnétique et en général polarisée elliptiquement dans un plan qui n'est pas en général celui de polarisation de l'onde ou celui de la rotation cyclotron.

1.2.3. Résolution des équations de Maxwell.

Il reste à considérer comment l'existence de cette densité de courant se traduit par des propagations différentes suivant le sens de polarisation de l'onde électromagnétique. Pour cela il convient de négliger l'existence des collisions dans le cristal, autrement dit d'admettre que le temps de relaxation τ est infini. Cette approximation correspond aux vues intuitives du début de cet exposé et à l'existence d'une rotation cyclotron bien établie et non perturbée. L'expression de la densité de courant devient alors

Bien entendu cette expression n'a de valeur que par rapport aux axes particuliers choisis au départ pour repérer le cristal. Pratiquement, en fait, l'effet « Hélicon » est lié à l'existence du courant de Hall, lequel dépend de l'orientation respective du plan de polarisation du champ électrique et du plan de de rotation cyclotron. Il est alors naturel de choisir comme plan de coordonnées le plan de polarisation de E, ce qui en outre a l'avantage de simplifier la résolution des équations de Maxwell. Par rapport à ces nouveaux axes la matrice de conductivité prend une forme différente de ci-dessus, variable avec la rotation d'axes. Heureusement, la matrice est hermitique et ce fait va permettre de traiter aisément le cas général. Pour cela démontrons d'abord le lemme suivant :

Si A est une matrice hermitique, la matrice $S^{-1}AS$, où S est une matrice unitaire, est également hermitique.

En effet, si A^* désigne la matrice adjointe de A, le fait que A soit hermitique implique

$$A = A^*.$$

Par ailleurs si S^{-1} désigne la matrice inverse de S, le fait que S soit unitaire implique

$$S^{-1} = S^*,$$

soit alors à calculer $(S^{-1}AS)$:

$$(S^{-1}AS)^* = S^*A^*(S^{-1})^* = S^{-1}AS,$$

ce qui démontre le lemme.

Or toute rotation des axes de référence utilisés pour le repérage du cristal s'exprime par une matrice unitaire à éléments réels. Il découle alors du lemme précédent qu'au cours de ces rotations, la matrice

$$\frac{1}{j\omega}\sigma \qquad \text{en posant} \quad (\mathbf{j}) = (\sigma)(\mathcal{E})$$

reste hermitique.

Or, en reportant l'expression de $\mathbf{j}$ dans les équations de Maxwell, le comportement de l'onde électromagnétique sera connu en résolvant le système

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\,\mathcal{E} &= -j\omega\mu_0\mathcal{H},\\
(\mathbf{rot}\,\mathcal{H}) &= (\sigma)(\mathcal{E}) + \mathbf{j}\,\omega\varepsilon_R(\mathcal{E})\\
&= j\omega\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_R & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_R & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_R\end{pmatrix} + \frac{1}{j\omega}(\sigma)\right](\mathcal{E}),
\end{aligned}$$

où ε_R désigne la constante diélectrique « réseau » du matériau. Il découle donc des résultats précédents que le système à résoudre se ramène finalement à

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\,\mathcal{E} &= -\mathbf{j}\,\omega\mu_0\mathcal{H},\\
(\mathbf{rot}\,\mathcal{H}) &= \mathbf{j}\,\omega(\varepsilon)(\mathcal{E}),
\end{aligned}$$

où

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon'_1 & \varepsilon''_1\\ \varepsilon_2 & \varepsilon'_2 & \varepsilon''_2\\ \varepsilon_3 & \varepsilon'_3 & \varepsilon''_3\end{pmatrix}$$

est hermitique quel que soit le système d'axes de référence choisi et donc en particulier pour celui où

$$(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix}\mathcal{E}_1\\ \mathcal{E}_2\\ 0\end{pmatrix}.$$

Se limitant alors à l'étude des solutions possibles concernant une propagation rectiligne de l'énergie (plan de polarisation de **H** confondu avec celui de **E**), choisissant les axes Ox et Oy arbitrairement disposés dans un plan parallèle au plan de polarisation de **H** et **E** (propagation de l'énergie suivant Oz) et explicitant les rotationnels en coordonnées cartésiennes il vient

$$\begin{cases}
-\dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}_y = -j\omega\mu_0\mathcal{H}_x,\\
\dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}_x = -j\omega\mu_0\mathcal{H}_y,\\
\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{E}_y - \dfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_x = 0;
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
-\dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{H}_y = j\omega\varepsilon_1\mathcal{E}_x + j\omega\varepsilon'_1\mathcal{E}_y,\\
\dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{H}_x = j\omega\varepsilon_2\mathcal{E}_x + j\omega\varepsilon'_2\mathcal{E}_y,\\
\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_y - \dfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_x = j\omega\varepsilon_3\mathcal{E}_x + j\omega\varepsilon'_3\mathcal{E}_y;
\end{cases}$$

soit en cherchant des solutions sous la forme d'ondes planes

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \mathcal{E}_0\, e^{-j\mathbf{k}.\mathbf{r}} = \mathcal{E}_0\, e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z},\\
\mathcal{H} &= \mathcal{H}_0\, e^{-j\mathbf{k}.\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{H}_0$ vecteurs constants;

$$\begin{cases}
(a) \quad jk_z\mathcal{E}_{0y} = -j\omega\mu_0\mathcal{H}_{0x},\\
(b) \quad -jk_z\mathcal{E}_{0x} = -j\omega\mu_0\mathcal{H}_{0y},\\
(e) \quad -jk_x\mathcal{E}_{0y} + jk_y\mathcal{E}_{0x} = 0;
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
(c) \quad jk_z\mathcal{H}_{0y} = j\omega\varepsilon_1\mathcal{E}_{0x} + j\omega\varepsilon'_1\mathcal{E}_{0y},\\
(d) \quad -jk_z\mathcal{H}_{0x} = j\omega\varepsilon_2\mathcal{E}_{0x} + j\omega\varepsilon'_2\mathcal{E}_{0y},\\
(f) \quad -jk_x\mathcal{H}_{0y} + jk_y\mathcal{H}_{0x} = j\omega\varepsilon_3\mathcal{E}_{0x} + j\omega\varepsilon'_3\mathcal{E}_{0y}.
\end{cases}$$

Les équations (a), (b), (c), (d) ne sont compatibles que si

$$[k_z^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_1][k_z^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon'_2] - (\omega^2\mu_0)^2\varepsilon_2\varepsilon'_1 = 0$$

conduisant à deux valeurs possibles de k_z^2 (et donc de k_z en ne retenant que la racine correspondant à une atténuation lors de la propagation). Pour ces valeurs de k_z, les composantes $\mathcal{E}_{0y}$, $\mathcal{H}_{0x}$, $\mathcal{H}_{0y}$ s'expriment aisément en fonction de $\mathcal{E}_{0x}$:

$$\mathcal{E}_{0y} = \frac{k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon'_1} \mathcal{E}_{0x},$$

$$\mathcal{H}_{0x} = -\frac{k_z}{\omega \mu_0} \frac{k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon'_1} \mathcal{E}_{0x},$$

$$\mathcal{H}_{0y} = \frac{k_z}{\omega \mu_0} \mathcal{E}_{0x}.$$

Le report de ces valeurs dans les équations (*e*) et (*f*) fournit un système linéaire du premier ordre permettant d'exprimer k_x et k_y en fonction de k_z.

En conséquence :

A une propagation rectiligne donnée de l'énergie correspond en général deux ondes planes dont les vecteurs d'onde sont différents.

Les ondes planes obtenues sont telles que

$$\mathcal{E}_{0y} = \frac{k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon'_1} \mathcal{E}_{0x}$$

$$= \frac{\varepsilon'_2 - \varepsilon_1 \pm \sqrt{(\varepsilon'_2 - \varepsilon_1)^2 + 4 \varepsilon_2 \varepsilon'_1}}{2 \varepsilon'_1} \mathcal{E}_{0x},$$

relation impliquant qu'en général les deux ondes planes sont polarisées elliptiquement. Reste à démontrer que les polarisations sont en fait inverses. Ici intervient à nouveau l'hermiticité de la matrice (ε) grâce au théorème démontré en Annexe II et rappelé ci-après.

Si une matrice (ε) *est hermitique, il existe au moins une matrice unitaire S à éléments réels telle que* $S^{-1}(\varepsilon)S$ *ait les deux premiers éléments de la diagonale principale égaux.*

La démonstration de ce théorème montre que cette matrice S correspond à une matrice de rotation d'axes de référence autour de l'axe 3. Ramené au problème des équations de Maxwell, ce théorème signifie simplement qu'on peut toujours choisir les axes de référence dans le plan de polarisation de l'onde (rotation autour de Oz) de façon que $\varepsilon_1 = \varepsilon'_2$. Alors

$$\mathcal{E}_y = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1}} \mathcal{E}_x.$$

Or, (ε) étant hermitique, si

$$\varepsilon_2 = \rho e^{j\varphi}$$

nécessairement

$$\varepsilon'_1 = \rho e^{-j\varphi}$$

et donc

$$\mathcal{E}_y = \pm e^{j\varphi} \mathcal{E}_x.$$

Les deux ondes planes obtenues comme solutions possibles sont donc polarisées en général elliptiquement, avec une même ellipticité, mais en sens inverses.

Dans le système d'axes final obtenu, les expressions déterminant k_x, k_y, k_z sont simples; il est trouvé

$$k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \left[\varepsilon_1 \pm \sqrt{\varepsilon'_1 \varepsilon_2} \right],$$

$$k_z k_x \left[1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1} \right] = -\omega^2 \mu_0 \left[\varepsilon_3 \mp \varepsilon'_3 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1}} \right],$$

$$k_y = \pm k_x \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1}} = \pm k_x e^{j\varphi}.$$

La valeur de $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ s'en déduit

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$= \omega^2 \mu_0 \left[\left[\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon'_1 \varepsilon_2} \right] + 2 \frac{\left| \varepsilon_3 - \varepsilon'_3 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1}} \right|^2}{\left| 1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1} \right|^2 \left[\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon'_1 \varepsilon_2} \right]} \right].$$

Autrement dit :

Pour chacune des ondes le milieu se présente comme un diélectrique ordinaire, muni d'une constante diélectrique scalaire apparente, différente selon le sens de polarisation.

L'égalité $k_y = \pm k_x e^{j\varphi}$ indique en outre que dans le cas général, les deux ondes s'atténuent lors de la propagation, car cette expression implique qu'au moins l'un des deux nombres k_x ou k_y est complexe. Les seuls cas où l'on puisse espérer une propagation sans atténuation sont donc

$$e^{j\varphi} = \pm 1 \qquad \text{ou} \qquad k_x = 0.$$

Le premier cas correspond à une polarisation rectiligne; intuitivement on voit que c'est le cas où le champ électrique est polarisé rectilignement suivant la normale au plan de rotation cyclotron. Il n'y a alors pas de courant de Hall et pas d'effet « Hélicon ».

Dans le deuxième cas, en supposant $k_x = 0$ réalisé pour l'une des ondes, les valeurs du vecteur d'onde sont déterminées par

$$\begin{cases} k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \left[\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon'_1 \varepsilon_2} \right], \\ 0 = -\omega^2 \mu_0 \left[\varepsilon_3 + \varepsilon'_3 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1}} \right], \\ k_y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \left[\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon'_1 \varepsilon_2} \right], \\ k_z k_x \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1} \right) = -\omega^2 \mu_0 \left[\varepsilon_3 - \varepsilon'_3 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1}} \right], \\ k_y = -k_x e^{j\varphi} = -k_x \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1}}. \end{cases}$$

Une telle solution n'est possible que si :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_2,$$

condition de validité des équations précédentes;

$$\varepsilon_3 + \varepsilon'_3 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_1}} = 0,$$

condition $k_x = k_y = 0$ pour l'une des ondes.

Cette deuxième condition ne pourra être obtenue que pour des positions bien particulières du plan de polarisation. Mais alors si l'une des ondes peut se propager sans atténuation, l'autre est en général atténuée (k_x et $k_y \neq 0$). On retrouve l'effet « Hélicon ». Donc :

Pour certaines orientations du plan de polarisation, l'une des ondes est transmise sans atténuation, l'autre étant atténuée en général. Pour l'onde transmise, le vecteur d'onde est orienté suivant la direction de propagation de l'énergie.

Le seul cas possible où les deux ondes pourraient en principe être transmises toutes deux sans atténuation est obtenu pour

$$\varepsilon_3 = \varepsilon'_3 = 0.$$

Ce cas sera effectivement rencontré par la suite. Les deux ondes sont transversales et la constante de propagation est donnée par

$$k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \left[\varepsilon_1 \pm \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon'_1} \right],$$

selon le signe de $\varepsilon_1 \pm \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon'_1}$ il y a en fait propagation ou évanescence des ondes considérées. Ce point sera particulièrement discuté au paragraphe suivant.

Dans le cas où dans le matériau existent plusieurs types de porteurs différenciés soit par leur charge électrique, soit par des masses différentes (surfaces à énergie constante ayant plusieurs minimums dans l'espace des vecteurs d'onde), il faut effectuer le calcul précédent pour chaque type de porteur puis ajouter les densités de courant. La somme de matrices hermitiques étant également hermitique, les conclusions générales précédentes restent valables mais au prix d'expressions littérales plus compliquées (7).

En conséquence, dans le cas d'un matériau semiconducteur quelconque, une vérification expérimentale du phénomène impliquerait l'utilisation d'un corps monocristallin et un repérage soigneux des directions relatives du réseau cristallin, de l'induction magnétique et du plan de polarisation de l'onde; les correspondances quantitatives entre expérience et théorie seraient très délicates et longues à établir. Pour une vérification expérimentale et confrontation avec la théorie, le matériau idéal est donc caractérisé par :

— une masse isotrope des porteurs;

— un seul type de porteur;

qualités auxquelles il faut ajouter, si l'on ne veut pas que le phénomène soit masqué par les collisions, un temps de relaxation τ suffisamment grand. De telles conditions sont effectivement réunies dans l'antimoniure d'indium InSb dans lequel électrons et trous de conduction ont une masse scalaire et pour lequel la mobilité des électrons est grande (donc τ élevé), ce qui rend simultanément négligeable, comme on le verra, la contribution des trous à la densité de courant totale. En conséquence, dans tout ce qui suit, il ne sera plus question que du cas particulier où la masse des porteurs est scalaire.

1.3. Définition du mode de propagation « Hélicon » dans le cas particulier où la masse apparente des porteurs est scalaire.

1.3.1. Expression des ondes planes se propageant dans la direction de $\boldsymbol{B}$.

La masse étant scalaire, le choix des axes de référence pris au paragraphe 2 le long des axes principaux de l'ellipsoïde à énergie constante dans l'espace des vecteurs d'onde, devient indéterminé. Il est tentant dans ces conditions de placer l'un des axes parallèlement à $\boldsymbol{B}$ et ce choix sera le bon si en outre l'étude est limitée au cas où le plan de polarisation de l'onde est perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$.

Avec ce choix des axes (adoptons $\boldsymbol{B}$ sur l'axe 3), la matrice de conductivité devient, pour les électrons de conduction (8) :

$$(\sigma) = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1}{[1 + j\omega\tau]^2 + \omega_c^2\tau^2} + \begin{pmatrix} 1 + j\omega\tau & \omega_c\tau & 0 \\ -\omega_c\tau & 1 + j\omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{[1 + j\omega\tau]^2 + \omega_c^2\tau^2}{1 + j\omega\tau} \end{pmatrix},$$

(7) Une analyse de cas particuliers importants (cas des ondes de Alfvèn par exemple) a été effectuée par R. Veilex (*Thèse de doctorat* du 18 février 64).

(8) Utiliser l'équation (4) du paragraphe 1.2, plus $\mathbf{j} = nq\mathbf{V}$ sachant que $\boldsymbol{B}$ étant sur l'axe 3 : $\alpha = \beta = 0$; $\gamma = 1$ et que la masse étant scalaire, $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

où

$$\omega_c = \frac{qB}{m}.$$

La matrice de constante diélectrique apparente s'en déduit et

(7) (9)
$$(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon_R + \dfrac{nq^2\tau}{j\omega m}\dfrac{1+j\omega\tau}{[1+j\omega\tau]^2+\omega_c^2\tau^2} & \dfrac{nq^2\tau}{j\omega m}\dfrac{\omega_c\tau}{[1+j\omega\tau]^2+\omega_c^2\tau^2} & 0 \\ -\dfrac{nq^2\tau}{j\omega m}\dfrac{\omega_c\tau}{[1+j\omega\tau]^2+\omega_c^2\tau^2} & \varepsilon_R + \dfrac{nq^2\tau}{j\omega m}\dfrac{1+j\omega\tau}{[1+j\omega\tau]^2+\omega_c^2\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_R + \dfrac{nq^2\tau}{j\omega m[1+j\omega\tau]} \end{bmatrix}.$$

Cette forme est suffisamment simple pour tenter la résolution des équations de Maxwell dans le cas général où τ n'est pas considéré comme infini, ce qui permettra de préciser à partir de quand son influence est effectivement négligeable.

Reprenant alors les résultats du paragraphe précédent [les deux premiers termes de la diagonale principale de (ε) sont égaux], les solutions ondes planes possibles sont caractérisées par les faits suivants :

Les deux ondes planes obtenues comme solutions possibles sont polarisées circulairement en sens inverse.

En effet :

$$\mathcal{E}_y = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1'}}\mathcal{E}_x = \pm\begin{bmatrix} \dfrac{nq^2\tau}{j\omega m}\dfrac{\omega_c\tau}{(1+j\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} \\ -\dfrac{nq^2\tau}{j\omega m}\dfrac{\omega_c\tau}{(1+j\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}\mathcal{E}_x = \mp j\mathcal{E}_x.$$

Les expressions fournissant les composantes du vecteur d'onde se réduisent à

$$k_z^2 = \omega^2\mu_0\left[\varepsilon_R + \frac{nq^2\tau}{j\omega m}\frac{1}{1+j\omega\tau \mp j\omega_c\tau}\right],$$
$$k_x = 0,$$
$$k_y = 0.$$

Ainsi, pour les ondes considérées, le milieu se comporte comme un diélectrique usuel caractérisé par une constante diélectrique scalaire apparente :

$$\varepsilon_R + \frac{nq^2\tau}{j\omega m}\frac{1}{(1+j\omega\tau) \mp j\omega_c\tau}.$$

Résumons les résultats :

Dans un milieu où la masse des porteurs est scalaire, la forme élémentaire d'onde plane se propageant dans la direction de l'induction magnétique **B** *est constituée de la superposition de deux ondes polarisées circulairement, en sens inverse l'une de l'autre, se propageant avec des constantes de propagation différentes.*

Pour un sens de polarisation ($\mathcal{E}_y = +j\mathcal{E}_x$) *tout se passe comme si le milieu était caractérisé par une constante diélectrique scalaire égale à*

$$\varepsilon + j\varepsilon' = \varepsilon_R + \frac{nq^2\tau}{j\omega m}\frac{1}{[1+j\omega\tau] \quad j\omega_c\tau},$$

où $\omega_c = \dfrac{qB}{m}$ est algébrique (q, charge électrique).

Pour l'autre sens de polarisation ($\mathcal{E}_y = -j\mathcal{E}_x$) *tout se passe comme si le milieu était caractérisé par une constante diélectrique scalaire égale à*

$$\varepsilon - j\varepsilon' = \varepsilon_R + \frac{nq^2\tau}{j\omega m}\frac{1}{1+j\omega\tau + j\omega_c\tau}.$$

La valeur de la constante de propagation est régie directement par celle de la constante diélectrique apparente présentée par le milieu pour l'onde considérée.

Autrement dit, l'étude de **k** se ramène à celle des constantes diélectriques apparentes, ce qui est l'objet du paragraphe suivant.

1.3.2. Étude des constantes diélectriques apparentes.

Selon que $\mathcal{E}_y = \pm j\mathcal{E}_x$, la constante diélectrique vaut

$$\varepsilon_R + \frac{nq^2\tau}{j\omega m}\frac{1+j\omega\tau \pm j\omega_c\tau}{[1+j\omega\tau]^2+\omega_c^2\tau^2} = \varepsilon_R + \frac{1}{j\omega}\frac{\dfrac{nq^2\tau}{m}}{1+j[\omega \quad \omega_c]\tau}.$$

Avant d'aller plus loin, il faut remarquer que ces valeurs ont été établies en ne tenant compte que d'un seul type de porteur. En fait il existe également dans le matériau les trous de conduction. Il est nécessaire de vérifier qu'il est licite de négliger leur influence. Pour différencier trous et électrons, on pose

p	concentration en trous,
$q = +e$	pour les trous,
$q = -e$	pour les électrons,

(9) Bien noter qu'ici ω_c est algébrique.

et l'on indice en n ou p les variables selon qu'elles se rapportent aux électrons ou aux trous. Dans le cas général, la constante diélectrique apparente vaut donc

$$\varepsilon_R + \frac{ne^2\tau_n}{j\omega m_n}\,\frac{1}{1+j\left[\omega \pm \frac{eB}{m_n}\right]\tau_n} + \frac{pe^2\tau_p}{j\omega m_p}\,\frac{1}{1+j\left[\omega \mp \frac{eB}{m_p}\right]\tau_p}$$

soit, en introduisant les mobilités μ_n et μ_p :

$$\varepsilon_R + \frac{ne\mu_n}{j\omega}\,\frac{1}{1+j\omega\tau_n \pm j\mu_n B} + \frac{pe\mu_p}{j\omega}\cdot\frac{1}{1+j\omega\tau_p \mp j\mu_p B},$$

soit encore

$$\varepsilon_R + \frac{ne\mu_n}{j\omega}\,\frac{1}{1+j\omega\tau_n \pm j\mu_n B}\left[1 + \frac{p}{n}\,\frac{\mu_p}{\mu_n}\,\frac{1+j\omega\tau_n \pm j\mu_n B}{1+j\omega\tau_p \mp j\mu_p B}\right]$$

et pour que l'influence des trous soit négligeable, c'est-à-dire que la valeur de la constante diélectrique se ramène à celle ne concernant qu'un type de porteurs, il suffit que

$$1 \gg \frac{p}{n}\,\frac{\mu_p}{\mu_n}\,\frac{1+j\omega\tau_n \pm j\mu_n B}{1+j\omega\tau_p \mp j\mu_p B},$$

ce qui est à démontrer selon des ordres de grandeurs

Température ambiante. — Alors, sur les échantillons utilisés, InSb est intrinsèque, soit $n = p$; par ailleurs, comme ordre de grandeur [5],

$$\mu_n = 7{,}8\ \mathrm{m^2/Vs}, \qquad \mu_p = 7{,}5.10^{-2}\ \mathrm{m^2/Vs},$$

ce qui, en adoptant

$$m_n = 0{,}013 \times 9{,}1.10^{-31}\ \mathrm{kg}, \qquad m_p = 0{,}6 \times 9{,}1.10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

conduit à

$$\tau_n = 5{,}8.10^{-13}\ \mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad \tau_p = 2{,}56.10^{-13}\ \mathrm{s}.$$

En outre dans les expérimentations, B dépasse rarement 1 Wb/m^2.

Dans ces conditions, approximativement :

$$10^{-2} \leqq \frac{p}{n}\,\frac{\mu_p}{\mu_n}\,\frac{1+j\omega\tau_n \pm j\mu_n B}{1+j\omega\tau_p \mp j\mu_p B} \leqq [1 \pm 7{,}8j].10^{-2}.$$

Température de l'azote liquide. — Les échantillons utilisés sont de type n avec $n = 10^{20}$ à 10^{21} par mètre cube. Comme à 77°K, on a sensiblement

$$n_i^2 \# 4.10^{-30} \qquad (n_i, \text{ concentration intrinsèque}),$$

alors

$$\frac{p}{n} = \frac{n_i^2}{n^2} = \frac{4.10^{30}}{10^{40}} = 4.10^{-10},$$

ce qui ne laisse aucun doute sur la validité de l'approximation à 77°K.

En conclusion :

Pour les inductions magnétiques inférieures à 1 Wb/m^2 (10 000 gauss) *à la température ambiante, pratiquement quel que soit B à* 77°K, *la contribution des trous à la constante diélectrique apparente est, pour un matériau de type n, négligeable devant celle des électrons.*

Il faut donc étudier comment varie

$$\varepsilon_R + \frac{ne^2\tau}{j\omega m}\,\frac{1}{1+j[\omega \pm \omega_c]\tau} \begin{cases} + & \text{si } \mathcal{E}_y = -j\mathcal{E}_x \\ - & \text{si } \mathcal{E}_y = \ \ j\mathcal{E}_x \end{cases}$$

avec

$$e = +1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{Cb} \qquad \text{et} \qquad \omega_c = e\frac{B}{m}.$$

La constante diélectrique apparente est donc complexe et, en séparant parties réelle et imaginaire :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_R \quad \frac{ne\mu}{\omega}\,\frac{[\omega \pm \omega_c]\tau}{1+[\omega \pm \omega_c]^2\tau^2} - j\left[\frac{ne\mu}{\omega}\,\frac{1}{1+[\omega \pm \omega_c]^2\tau^2}\right].$$

Lors des expérimentations, la variable immédiatement apparente est la valeur de l'induction magnétique B liée linéairement à ω_c. Pour éliminer le signe $\pm$ lié au sens de la polarisation il suffit de prendre conventionnellement B ou ω_c algébrique sachant que B ou $\omega_c > 0$ traduisent un sens de polarisation tel que $\mathcal{E}_y = -j\mathcal{E}_x$ et B ou $\omega_c < 0$ l'autre sens. Ensuite, en prenant comme abscisse le terme

$$\frac{\omega_c}{\omega} = \frac{\mu B}{\omega\tau},$$

la constante diélectrique peut se traduire par deux réseaux de courbes (parties réelle et imaginaire) paramétrées par $\omega\tau$. Ces courbes sont données par les figures 1 et 2.

Ces courbes et les formules dont elles sont tirées imposent les remarques suivantes :

— Pour chaque type de polarisation, le milieu se présente comme un diélectrique à perte usuelle, caractérisé par une constante diélectrique complexe dont la partie imaginaire reflète les pertes associées à une conductivité apparente et la partie réelle la constante diélectrique usuelle

$$\left(\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}.\right)$$

— Aux valeurs de B très élevées, le matériau se présente pour les deux types de polarisations comme un diélectrique parfait de constante diélectrique ε_R.

— Pour le type de polarisation $\mathcal{E}_y = j\mathcal{E}_x$, lorsque la valeur de $|B|$ décroît, la constante diélectrique commence par diminuer puis s'annule puis devient négative. Quoiqu'il n'y ait pas de pertes apparentes

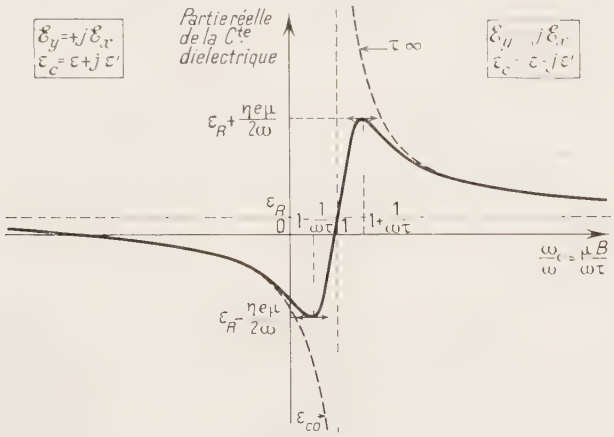


Fig. 1.

$$\mathcal{R}\left[\varepsilon_R - \frac{ne^2}{m\omega}\,\frac{1}{\omega - \omega_c - \dfrac{j}{\tau}}\right].$$

cette onde n'est plus alors transmise, et se trouve par conséquent totalement réfléchie. Lorsque $|B|$ tend vers zéro, les pertes apparaissent et autorisent une propagation fortement atténuée.

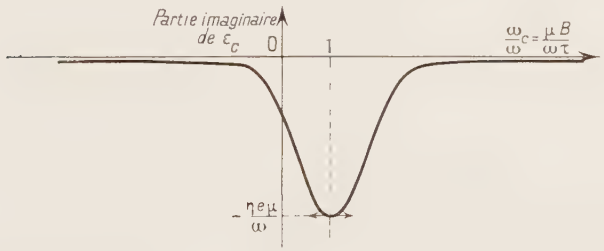


Fig. 2.

$$\mathcal{I}\left[\varepsilon_R - \frac{ne^2}{m\omega}\,\frac{1}{\omega - \omega_c - \dfrac{j}{\tau}}\right].$$

— Pour l'autre type de polarisation, lorsque la valeur de B décroît, l'onde se propage dans un milieu diélectrique parfait dont la constante diélectrique augmente. Ceci reste vrai jusqu'aux faibles valeurs de B où d'abord les pertes apparaissent puis passent par un maximum alors que ε, après avoir passé par un maximum, décroît et devient égal à ε_R. On retrouve ici le phénomène connu de la résonance cyclotron. Au-delà, lorsque B tend vers zéro, les pertes restent fortes et la constante diélectrique est négative; *grosso modo* le comportement de cette onde devient le même que pour l'onde polarisée en sens inverse.

Autrement dit :

Pour les valeurs de l'induction magnétique continue B ni trop élevées, ni trop faibles, l'antimoniure d'indium se présente, pour une onde électromagnétique se propageant dans la direction de ***B****, comme un diélectrique parfait caractérisé par une constante diélectrique* > 0 *ou* < 0 *suivant que l'onde est polarisée circulairement dans un sens ou dans l'autre. Ce phénomène a reçu le nom de phénomène « Hélicon »* [1].

Les termes « B ni trop élevées, ni trop faibles » peuvent être précisés à la lueur de l'expression

$$\varepsilon_c = \varepsilon_R - \frac{ne^2}{m\omega}\,\frac{1}{\omega \pm \omega_c - \dfrac{j}{\tau}},$$

expression qui montre que les pertes seront négligeables si

$$\omega \gg \omega_c \pm \frac{1}{\tau}$$

et que le matériau présentera deux constantes diélectriques apparentes, l'une > 0 et l'autre < 0 si

$$\omega < \omega_c,$$
$$\varepsilon_R < \frac{ne}{B\omega}.$$

Ce qui permet d'énoncer :

Il y a propagation du mode « Hélicon » si

$$\omega_c \gg \omega,$$
$$\omega_c \tau \gg 1,$$
$$\frac{ne}{B\omega} > \varepsilon_R.$$

Alors

$$\varepsilon \neq \pm \frac{ne}{B\omega}.$$

Dans le cas de InSb, ces conditions sont pratiquement toujours réalisées dans les ordres de grandeur usuels des variables. En effet :

Température ambiante :

ω_c ω : La zone de fréquence qui sera étudiée couvre de 10 à 1000 MHz.

Dans un cas très défavorable $\omega_c = \omega$ pour une valeur de B telle que

$$\omega_c \tau = \mu B = \omega\tau.$$

soit

$$B = \frac{\omega\tau}{\mu} = \frac{\omega\tau}{\frac{e\tau}{m}} = \frac{m}{e}\omega,$$

soit à 4 000 MHz,

$$B = 2.10^{-3}\ \text{Wb/m}^2\ (20\ \text{gauss}) \quad (10).$$

La condition $\omega_c \gg \omega$ est donc réalisée dès que B dépasse quelques centaines de gauss.

$\omega_c\tau \gg 1$:

$$\omega_c\tau = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu B = 1,$$

soit

$$B = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{7.8} = 0,128\ \text{Wb/m}^2 \quad (10).$$

Cette condition est donc plus difficile à remplir et à la température ambiante il faut s'attendre à des pertes assez importantes lors de l'expérimentation.

$\frac{ne}{B\omega} \gg \varepsilon_R$: Cette condition fixe la borne supérieure en B de l'effet « Hélicon ». Elle n'a pas ici de signification pratique. En effet :

$$\frac{ne}{B\omega} = \varepsilon_R \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1,5.10^{22} \times 1,6.10^{-19} \times 35}{17.10^{-9} \times 2 \times 4.10^{9}}$$

$$700\ \text{Wb/m}^2\ (7.10^6\ \text{gauss}).$$

77°K :

$\omega_c \gg \omega$: Comme à la température ambiante, ceci impose $B \geq 20$ gauss et se trouve aisément réalisé.

$\omega_c\tau \gg 1$: A 77°K la mobilité est nettement meilleure qu'à la température ambiante

$$\omega_c\tau = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1,2.10^{-2}} \# 10^{-2}\ \text{Wb/m}^2 \quad (10).$$

Encore que de telles mobilités ne soient pas atteintes en pratique, cette condition est donc assez facilement obtenue.

$\frac{ne}{B\omega} \gg \varepsilon_R$: En adoptant un cas assez défavorable où

$$n = 10^{20}/\text{m}^3,$$
$$f = 4\,000\ \text{MHz},$$
$$\frac{ne}{B\omega} = \varepsilon_R \quad \Rightarrow \quad B = 4\ \text{Wb/m}^2\ (40\,000\ \text{gauss}).$$

Ceci devient un ordre de grandeur pratique et il faudrait faire attention pour des valeurs de f ou de B élevées.

(10) Valeurs de μ et de m tirées de C. Hilsum et A. C. Rose-Innes, *Semi-conducting III-V Compounds*, p. 46 et 122; de ε_R, p. 181; de n, p. 125.

Pour terminer cette revue des ordres de grandeur, il faut signaler que pratiquement, pour InSb, la courbe de la figure 1 est symétrique par rapport à l'origine des axes en raison des valeurs considérables obtenues pour la constante diélectrique apparente. A titre d'exemple, cette courbe est tracée sur la figure 3 pour

$$T = 77°\ \text{K},$$
$$n = 10^{20}/\text{m}^3,$$
$$\mu = 50\ \text{m}^2/\text{V.s},$$
$$f = 400\ \text{MHz}.$$

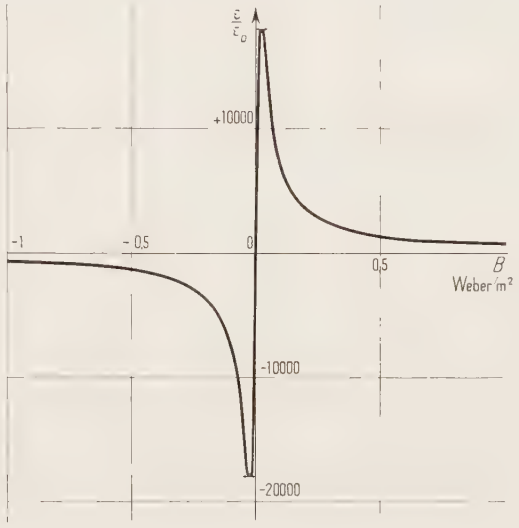


Fig. 3. — Effet « Hélicon » avec InSb.

$T = 77°\text{K},$
$n = 10^{20}/\text{m}^3,$
$\mu = 50\ \text{m}^2/\text{V.s},$
$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}.$

La valeur des pertes en chaque point se déduit immédiatement si l'on remarque que la tangente de l'angle de perte du matériau diélectrique équivalent vaut (pour $\varepsilon > 0$) :

$$\text{tg}\,\delta = \frac{1}{[\omega_c - \omega]\tau} \# \frac{1}{\mu B}.$$

Notons au passage que la constante diélectrique apparente relative est inhabituellement élevée et atteint 18 000. La valeur obtenue à la température ambiante et à 30 MHz, qui représente une expérimentation effectivement réalisée par la suite, est égale à 6.10^6.

2. VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE QUALITATIVE.

2.1. Principe de l'expérimentation envisagée.

Il ressort de la première partie que la constante diélectrique apparente du matériau est positive ou négative suivant le sens de polarisation circulaire de l'onde qui se propage. Si une onde polarisée circulairement et se propageant dans l'air heurte au cours de sa propagation un obstacle constitué par le semi-conducteur soumis à l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$, l'onde sera donc transmise ou réfléchie selon son sens de polarisation.

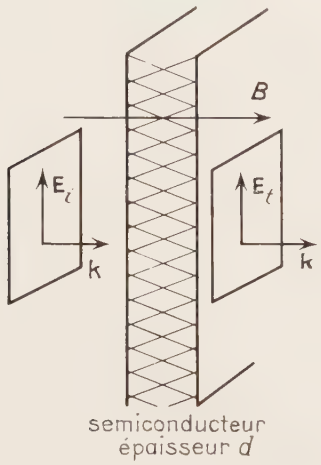


Fig. 4.

$\mathbf{E}_i$, champ électrique incident;
$\mathbf{k}$, vecteur unitaire dans la direction de propagation;
$\mathbf{E}_t$, champ électrique transmis.

La puissance véhiculée par l'onde transmise est donc considérablement différente dans les deux cas. En espace libre, la mise en œuvre de cet effet suppose la création d'une onde plane dont la progression est arrêtée par un « mur » plan parallèle au plan de polarisation de l'onde et supposé indéfini sauf dans la direction de propagation où il a une épaisseur d. L'expérimentation doit être alors capable de réaliser cette onde plane et de mesurer les puissances incidente et transmise.

Puisqu'il est possible de réaliser des ondes électromagnétiques planes limitées transversalement en les guidant par un ensemble de conducteurs, le problème du « mur » indéfini de InSb se ramène modestement à celui d'un échantillon, de faces planes et parallèles. La détermination de l'expérimentation se ramène donc au départ à celle de :

1° dimensions et caractéristiques de InSb;

2° nature du guide d'onde susceptible de guider des ondes planes polarisées circulairement dans une zone de fréquence choisie au préalable;

3° générateur, plus moyen d'obtenir la puissance délivrée sous forme d'onde à polarisation circulaire;

4° organe capable de mesurer puissances incidente et réfléchie.

2.2. Détermination du montage expérimental.

2.2.1. Caractéristiques et dimensions de l'échantillon.

Soit l'échantillon placé en travers du guide d'onde. Pour les besoins immédiats, il suffit de styliser le guide d'onde par un tuyau creux et de supposer que l'échantillon le bouche en totalité.

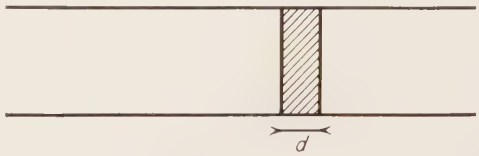


Fig. 5.

Pour l'onde polarisée de telle façon qu'elle soit transmise tout se passe en première approximation comme si InSb était un obstacle caractérisé par une constante diélectrique égale à

$$\varepsilon = \frac{ne}{B\omega}.$$

Cet obstacle ne perturbe pas la progression de l'onde vis-à-vis de la charge terminale du guide si (p désignant un nombre entier, λ_m, longueur d'onde dans InSb, λ_0 dans le vide)

$$d = p\frac{\lambda_m}{2} \quad (11)$$

$$= p\frac{\lambda_0}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}.$$

La perturbation est par contre considérable si

$$d = [2p+1]\frac{\lambda_m}{4}.$$

En ce cas, en effet, si Z_c désigne l'impédance caractéristique dans l'air de la ligne de transmission supposée adaptée en extrémité par la charge,

(11) Résultat classique d'électromagnétisme.

l'obstacle ramène sur sa face côté générateur une impédance égale à (Z_{cm} désignant l'impédance caractéristique de la ligne remplie de InSb)

$$Z = \frac{Z_{cm}^2}{Z_c} \neq Z_c \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon},$$

soit une désadaptation dans le rapport $\frac{ne}{B\omega\varepsilon_0}$.

Or l'analogie formelle du phénomène « Hélicon » avec celui de la résonance gyromagnétique dans les ferrites est évidente. Il doit donc être possible de réaliser, en utilisant le mode « Hélicon », un isolateur analogue à ceux utilisant les ferrites. Cependant il est connu que la gamme d'utilisation des ferrites ne descend pratiquement pas en dessous de 700 MHz alors que l'analyse précédente ne montre aucune limitation de principe du phénomène « Hélicon » vers les fréquences basses. Par conséquent, la plage de fréquence où il est particulièrement utile de vérifier le phénomène est

$$100\ \text{MHz} \leqq f \leqq 700\ \text{MHz},$$

le besoin d'isolateur étant peu sensible en dessous de 100 MHz. Pour la vérification expérimentale du phénomène, il convient d'élargir cette gamme, soit

$$25\ \text{MHz} \leqq f \leqq 2\,000\ \text{MHz}.$$

Pour l'induction magnétique B, il ressort des ordres de grandeur calculés au paragraphe 1.3.2, que

$$B = 1\ \text{Wb/m}^2\ (10\,000\ \text{gauss})$$

constitue une bonne valeur. Si B est plus faible, les pertes sont trop importantes à la température ambiante et pour obtenir B plus élevé, il faudrait compliquer beaucoup l'électroaimant comme on le verra ultérieurement.

Comme à la température ambiante n est fixé (InSb étant alors intrinsèque), la valeur de l'épaisseur de l'échantillon pour avoir la résonance en demi-longueur d'onde à la fréquence la plus basse est

$$d = \frac{\lambda_m}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} = \frac{c}{2f}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 B\omega}{ne}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2\pi B\varepsilon_0}{nef}}$$

$$(c = 3.10^8\ \text{m/s}),$$

soit pour

$$n = 1{,}6.10^{22}/\text{m}^2, \qquad f = 25\ \text{MHz}, \qquad B = 1\ \text{Wb/m}^2;$$

$$d = 4{,}4\ \text{mm}.$$

La commande de InSb devant être réalisée en pays anglo-saxon la valeur retenue est finalement

$$d = 0{,}17\ \text{inch} = 4{,}32\ \text{mm}.$$

Le fonctionnement à 2 000 MHz imposera pour l'adaptation une résonance en $9\frac{\lambda_m}{2}$ et la désadaptation causée dans le guide par l'obstacle InSb est fonction du rapport

$$\frac{ne}{B\omega\varepsilon_0}.$$

Ce rapport a été évalué numériquement à la fin du paragraphe 1.3.2 et a été trouvé considérablement plus grand que l'unité. Un procédé pour le réduire est de diminuer n, ce qui est possible au moins à 77°K en choisissant un matériau faiblement dopé. La meilleure qualité qu'on puisse trouver commercialement est

$$n = 10^{20}/\text{m}^3 \text{ à } 77^\circ\text{K},$$

cette valeur sera donc adoptée.

En ce qui concerne la forme, elle sera cylindrique en raison de la plus grande facilité de réalisation sous cette géométrie des pièces mécaniques du guide d'ondes adopté et également de la facilité d'usinage de InSb lui-même. Il ne reste plus qu'à déterminer le diamètre Ø du cylindre.

Cette dimension résulte d'un compromis entre le désir de simuler au mieux le « mur » indéfini du paragraphe 2.1 et l'obtention de la valeur voulue pour B (1Wb/m²). En effet, l'échantillon se rapprochera de l'image du « mur » d'autant mieux que le diamètre du cylindre sera grand devant la longueur d'onde dans InSb. Or à 25 MHz,

$$\frac{1}{2}\lambda_m = 4{,}4\ \text{mm}.$$

Donc

$$Ø \geqslant \lambda_m \Rightarrow Ø \geqslant 8{,}8\ \text{mm}.$$

Mais augmenter Ø conduit à augmenter le volume dans lequel une induction de 1W/m², aussi uniforme que possible, doit être obtenue; ce qui conduit à compliquer l'électroaimant. En conséquence, la valeur de Ø commercialement disponible étant au maximum de 0,5 inch, cette valeur a été adoptée.

Sur ces bases, deux échantillons ont été utilisés :

1° Échantillon monocristallin, ayant

à 77°K : $n = 1{,}1.10^{20}/\text{m}^3$, $\mu = 45\ \text{m}^2/\text{V.s}$;
à 290°K : $n = 1{,}6.10^{22}/\text{m}^3$, $\mu = 6\ \text{m}^2/\text{V.s}$.

2° Échantillon polycristallin, ayant

à 77°K : $n = 1{,}1.10^{-20}/\text{m}^3$, $\mu = 59\ \text{m}^2/\text{V.s}$;
à 290°K : $n = 1{,}6.10^{22}/\text{m}^3$, $\mu = 7{,}6\ \text{m}^2/\text{V.s}$,

tous deux de forme cylindrique; diamètre, 12,7 mm; longueur, 4,32 mm.

2.2.2. Caractéristiques et forme du guide d'ondes.

Afin de pouvoir transmettre une onde polarisée circulairement de façon relativement aisée et souple (gamme de sept octaves à couvrir) et pour pouvoir descendre à des fréquences aussi basses que 25 MHz, la propagation d'une onde T. E. M. ([12]) sur une ligne quadrifilaire sous écran a été retenue (*fig.* 6).

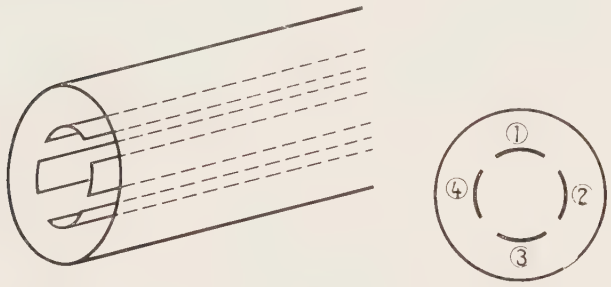


Fig. 6.

Cette structure offre les avantages suivants :

— rigoureusement apériodique;

— mécaniquement très simple. Les pièces sont issues de cylindres du commerce et le montage et le centrage se font rapidement et aisément à l'aide de pièces isolantes concentriques. Démontage et remontage sont rapides et les caractéristiques électriques reproductibles;

— l'existence de l'écran extérieur isole franchement le dispositif de tout ce qui l'entoure. Il y a peu de rayonnement et par conséquent pas d'effet de proximité des objets alentour (en particulier de la masse métallique de l'électroaimant);

— selon l'excitation des conducteurs 1, 2, 3 et 4 (*fig.* 6) il est possible d'obtenir tous les types de polarisation de façon immédiate :

— rectiligne en n'alimentant par exemple que 1 et 3 en opposition de phase;

— elliptique ou circulaire au centre en alimentant les quatre conducteurs avec des tensions d'égales amplitudes et les phases adéquates.

Dans cette structure néanmoins existent deux inconvénients :

— la polarisation ne peut être circulaire en tous points. Cela est lié à l'existence d'une polarisation rectiligne à la surface des conducteurs (supposés parfaits) et n'est d'ailleurs pas propre à cette structure; c'est le prix payé pour obtenir une onde de dimensions transversales limitées;

— si la polarisation elliptique est dans un sens dans la zone de la section droite limitée par le cercle joignant les quatre conducteurs intérieurs, elle est dans l'autre sens dans la couronne délimitée par le même cercle et l'écran extérieur.

Cela est immédiat sur la figure 7, le sens de polarisation étant celui qui amène le vecteur de phase

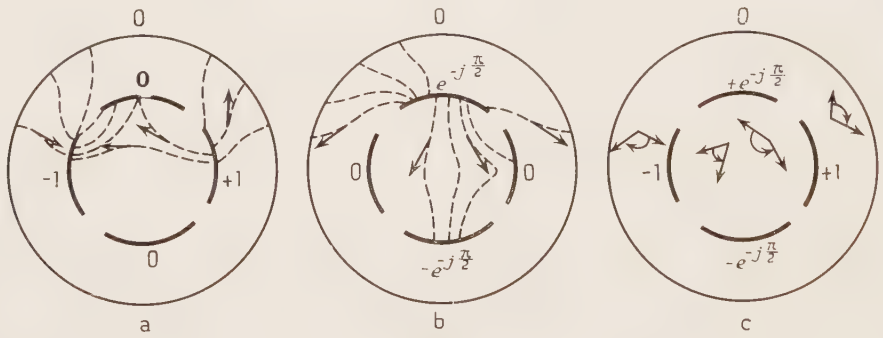


Fig. 7.

a. Polarisation rectiligne, lignes 2 et 4 alimentées, écran pris comme origine des tensions.
b. Polarisation rectiligne, lignes 1 et 3 alimentées, écran pris comme origine des tensions.
c. Superposition des états précédents.

nulle sur le vecteur de phase $-\frac{\pi}{2}$ par la rotation la plus faible.

Il ne sera donc pas possible de barrer tout le guide avec InSb sous peine d'avoir un phénomène peu prononcé, la puissance passant tantôt sur la périphérie, tantôt au centre selon le sens de $\boldsymbol{B}$ ou les phases des excitations.

([12]) Transverse électrique et magnétique.

InSb sera donc placé au centre seulement; il existe alors des « fuites » considérables autour de l'échantillon. Lors des résultats expérimentaux, il sera vu comment cette difficulté a été résolue.

InSb étant placé au centre, la dimension du diamètre intérieur est connue, soit

$$\text{Ø int.} = 12{,}7 \text{ mm.}$$

La dimension du tube écran extérieur ainsi que celle des conducteurs intérieurs (largeur des plaques) ont été déterminées expérimentalement sur papier rhéographique, sur les critères suivants :

— adaptation du guide à l'excitation et à la charge, constituées toutes deux par quatre câbles coaxiaux adaptés sur 50 Ω;

— maximum du rapport $\frac{\text{Puissance au centre}}{\text{Puissance sur la périphérie}}$

— à taux d'ellipticité donné, zone la plus large autour du centre.

Le montage final a donc l'allure de la figure 8.

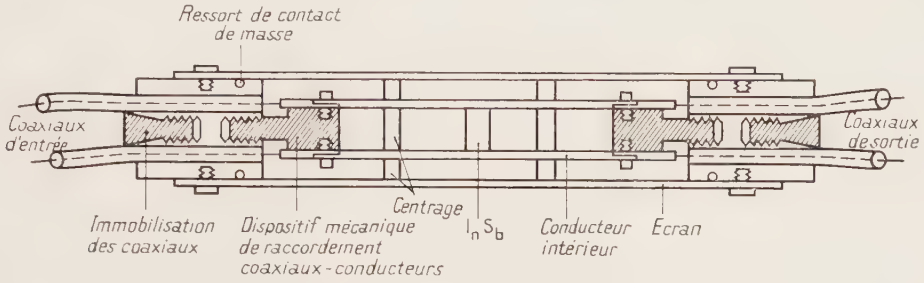


Fig. 8. — Pour la clarté de la figure, deux coaxiaux et deux conducteurs sur quatre ont seulement été représentés.

2.2.3. Détermination du générateur et du récepteur.

Lors de l'expérimentation il est nécessaire que l'énergie réfléchie par InSb et retournant vers le générateur ne se réfléchisse pas à nouveau sur ce dernier pour repartir vers InSb. C'est seulement à ce prix qu'on pourra avoir l'analyse simple suivante :

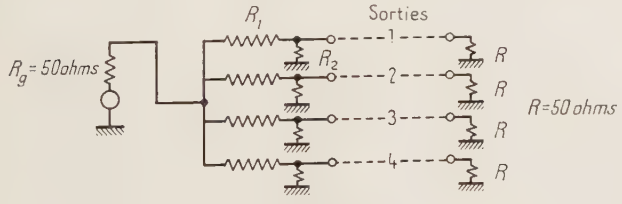


Fig. 9.

Le générateur délivre la puissance maximale qu'il peut fournir étant adapté (puissance utilisable du générateur). Cette énergie représente l'énergie incidente sur InSb; une partie est réfléchie, repart vers le générateur où elle est absorbée. L'énergie transmise doit alors être intégralement absorbée côté charge où elle est mesurée.

Or le « générateur » doit être capable de fournir quatre tensions d'amplitudes et de phases relatives variables. Ceci peut être réalisé de façon apériodique (il faut couvrir sept octaves) par un ensemble d'atténuateurs et de lignes de longueur ajustables.

Atténuateurs. — Il faut à partir d'un générateur usuel obtenir quatre sorties identiques et adaptées. Le schéma retenu est celui de la figure 9.

Chaque sortie doit être équivalente à un générateur ayant 50 Ω d'impédance interne lorsque les trois autres sorties sont adaptées. En outre, le générateur doit au total être chargé par 50 Ω si les quatre sorties le sont. Le calcul de ce réseau simple est effectué en Annexe III et donne

$$R_1 = 17{,}2\,\Omega, \qquad R_2 = 67\,\Omega,$$

la puissance utilisable sur chaque sortie étant bien entendu inférieure à celle du générateur, la perte étant de 16,9 dB.

La réalisation a été effectuée de façon à être compatible avec les fréquences de travail envisagées. Les résistances sont montées en coaxial et l'ensemble est soigneusement blindé. Il faut ajouter que les résistances R_2 sont en fait constituées de potentiomètres subminiatures, l'équilibrage des excitations devant être expérimentalement très précis. Enfin, pour avoir la certitude que chaque sortie sera bien équivalente à un générateur de 50 Ω d'impédance interne, un atténuateur coaxial de 10 dB supplémentaires a été inséré sur chaque sortie.

Réglage des phases. — Elle s'effectue simplement à l'aide de lignes ajustables du commerce. Le processus pour un réglage de tensions en opposition de phase consiste à les superposer à l'aide d'un T coaxial ordinaire avec un détecteur de zéro (*fig.* 10).

Lorsque la variation de la ligne devient insuffisante il suffit de disposer d'un certain nombre de coaxiaux de différentes longueurs qui sont insérés en série avec la ligne.

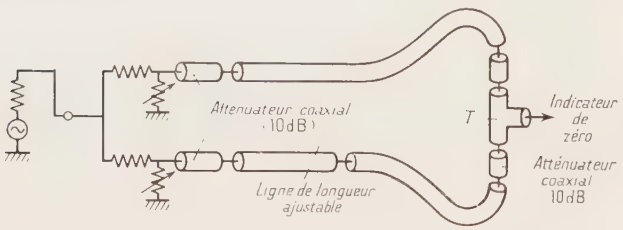


Fig. 10. — Principe du réglage des phases et des amplitudes.

Pour un réglage en quadrature, il suffit d'ajouter ou de retrancher $\frac{\lambda}{4}$ à la longueur après réglage en opposition.

Mesure de la puissance à la sortie. — L'adaptation du générateur se traduit hors tout par une atténuation de

$$16{,}9 + 10 = 26{,}9\ \text{dB}$$

Pour un générateur capable de délivrer 1 W, il ne reste donc plus environ que 1 mW comme puissance utilisable par sortie. Or, en l'absence de l'induction magnétique, l'échantillon d'InSb se comporte pratiquement comme un court-circuit entre les lignes excitées et très peu de puissance est alors transmise. Pour mesurer la puissance à la sortie seul alors un récepteur sensible peut convenir. Compte tenu de la gamme à couvrir il faut un récepteur superhétérodyne, ce qui permet d'ailleurs d'avoir la même sensibilité dans toute la gamme en ayant une bande passante faible et constante. Pratiquement, le récepteur a été constitué par un mélangeur à cristal suivi d'un amplificateur à bande étroite accordé sur 30 MHz.

La mesure s'effectue alors en deux temps :

1° à la fréquence choisie, détermination directe de la puissance utilisable;

2° le montage étant complet, mesure de la puissance transmise et de son écart par rapport à la puissance utilisable.

2.2.4. Électroaimant.

L'utilisation d'un électroaimant s'impose pour obtenir une valeur de B réglable à volonté. Comme il faut obtenir un champ longitudinal à l'intérieur d'un tube, il ne s'agit pas d'un électroaimant à pièces polaires classique, mais d'un solénoïde enfermé dans une carcasse de fer doux, connu sous le nom de bobine de Bitter [8] et déjà utilisé par A. Libchaber et R. Veilex lors de leur expérimentation sur l'effet « Hélicon » à 10 000 MHz [4]. Ce solénoïde est représenté schématiquement sur la figure 11. En première approximation, le champ magnétique d'un tel solénoïde bobiné avec du cuivre est donné par

$$H = G\sqrt{\frac{W\lambda}{a}},$$

où

H est le champ magnétique;
W, puissance d'alimentation;
λ, coefficient de remplissage du bobinage;
a, rayon intérieur du solénoïde;
G, coefficient dépendant de la forme du solénoïde.

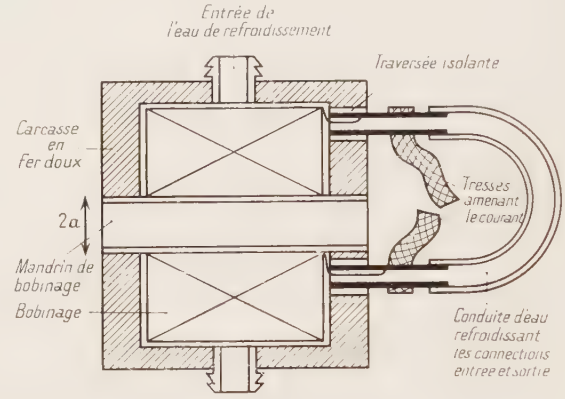


Fig. 11.

Le rayon intérieur du solénoïde est imposé par le diamètre extérieur du guide d'onde qui doit y pénétrer. Le coefficient de remplissage λ n'a pas été travaillé et le bobinage est simplement à spires jointives avec du fil de cuivre de $\Phi = 1{,}6$ mm. Conformément aux indications reçues au laboratoire de Physique de l'École Normale, ce fil a été guipé avec du fil nylon de 0,2 mm de diamètre pour faciliter le passage de l'eau de refroidissement de l'électroaimant. G est maximal pour un certain rapport longueur sur diamètre extérieur. Pour fixer soit l'une, soit l'autre de ces quantités, il suffit alors de se baser sur deux résultats :

1° H souhaité est connu et donc la puissance nécessaire; il faut alors que la puissance par centimètre cube dans l'électroaimant soit compatible avec le débit d'eau de refroidissement disponible;

2° les dimensions doivent être assez grandes pour obtenir une bonne constance de B dans le volume de l'échantillon.

D'où les dimensions du solénoïde et de l'électroaimant.

L'électroaimant a été étalonné à l'aide d'une sonde à effet Hall, elle-même préalablement étalonnée par comparaison avec une sonde à résonance nucléaire. L'induction magnétique obtenue est 1 Wb/m^2 (10 000 gauss) pour une puissance de 10 kW fournie par une dynamo de 100 V, 100 A.

2.3. **Premiers résultats expérimentaux.**

Si l'échantillon d'InSb est placé comme représenté sur la figure 8, une importante partie de l'énergie passe autour et en fait masque totalement l'effet étudié; expérimentalement, il est constaté que la puissance totale transmise est rigoureusement constante lorsque B varie de 0 à 10 000 gauss si l'échantillon d'InSb est isolé des lignes et est presque invariante si InSb est en contact avec les lignes. Il est donc indispensable ou bien d'éliminer ces fuites, ou bien d'utiliser un artifice tournant la difficulté. C'est la deuxième solution qui a été d'abord essayée, avec l'artifice suivant :

On suppose que seulement les lignes 1 et 3 sont alimentées avec des tensions d'égale amplitude et en opposition de phase. Si les tensions sont exactement égales et le montage parfaitement symétrique mécaniquement, on ne recueille aucune énergie sur les lignes 2 et 4 pour le guide d'onde considéré seul.

Fig. 12.

Si maintenant l'échantillon d'InSb soumis à $\boldsymbol{B}$ est introduit entre les lignes, il passe sur la périphérie l'onde à polarisation rectiligne. Au centre, par contre, celle-ci se décompose en deux polarisations circulaires de sens contraire dont une seule sera transmise. Une certaine puissance doit alors être recueillie sur les lignes non excitées. Par l'effet « Hélicon », InSb crée un couplage entre lignes excitées et non excitées.

L'expérience confirme et les résultats expérimentaux sont reportés sur la figure 13 pour InSb isolé des lignes, la fréquence étant de 30 MHz et la puissance utilisable, par ligne excitée, de 1 mW. Les remarques suivantes s'imposent :

1° les courbes obtenues pour $B > 0$ et $B < 0$ sont à peu près symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Le fait s'explique immédiatement : excité en polarisation rectiligne, InSb favorise la composante à polarisation circulaire droite ou gauche suivant le sens de $\boldsymbol{B}$. Or ces deux composantes véhiculent évidemment autant d'énergie l'une que l'autre;

2° les dissymétries observées s'expliquent si l'on considère le niveau excessivement bas auquel les phénomènes sont observables. Au maximum d'énergie recueillie, l'atténuation par rapport à la puissance utilisable d'excitation est dans le rapport $\frac{2.10^{-3}}{7.10^{-10}} \simeq 3.10^6$, c'est-à-dire qu'on recueille moins du millionième de la puissance utilisable; et il faut pour voir « confortablement » le phénomène assurer un découplage entre lignes excitées et non excitées de l'ordre de 80 dB (10^{-8} en puissance). A ce niveau, il est probable que les déséquilibres inévitables de montage mécanique sont compensés par un déséquilibre électrique, l'optimum obtenu se traduisant par une polarisation devenant légèrement elliptique favorisant une des composantes polarisées circulairement;

3° le maximum d'énergie transmise correspond à la résonance $\frac{\lambda}{2}$ prévue au paragraphe 2.2.1.

La même courbe que la figure 13 mais avec une échelle en décibels est portée sur le graphique de

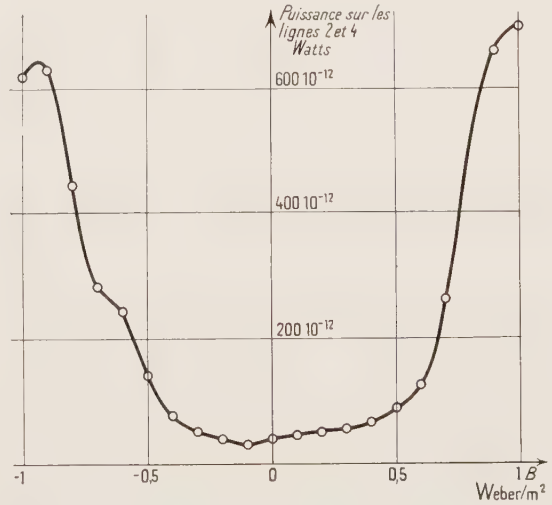


Fig. 13. — Lignes 1 et 3 seules excitées en opposition de phase, avec une puissance utilisable par ligne de 1 mW. $f = 30$ MHz.

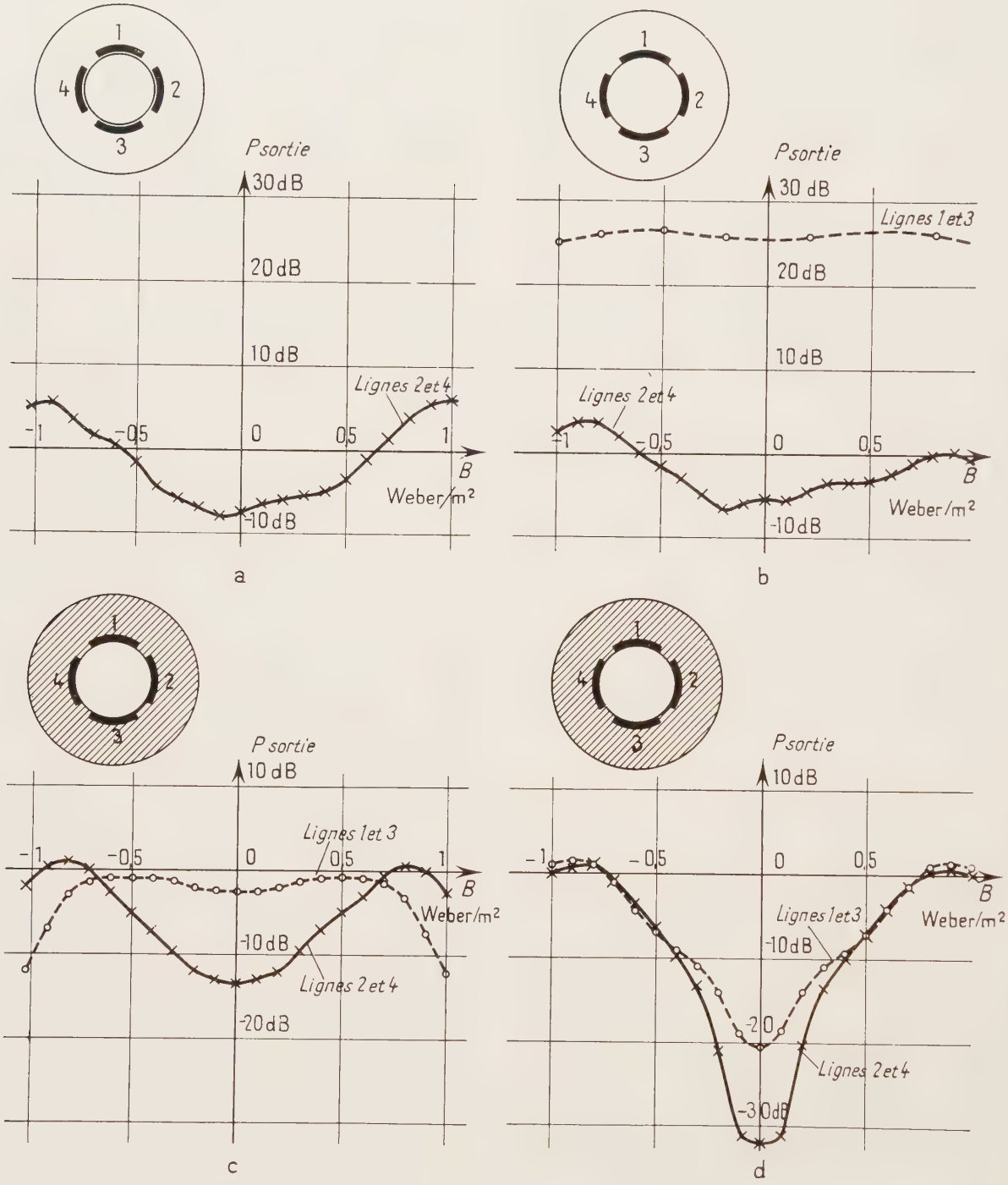


Fig. 14 *a*. — InSb est isolé des lignes. Il n'y a rien entre lignes et écran extérieur. Seules les lignes 1 et 3 sont alimentées en opposition de phase.

Fig. 14 *b*. — InSb est en contact par pression avec les lignes. Il n'y a rien entre lignes et écran extérieur. Seules les lignes 1 et 3 sont alimentées en opposition de phase.

Fig. 14 *c*. — InSb est en contact par pression avec les conducteurs. Une paroi en laiton connecte les conducteurs centraux et l'écran extérieur. Seules les lignes 1 et 3 sont alimentées en opposition de phase.

Fig. 14 *d*. — Comme dans le cas *c*, mais tous les contacts sont doublés de laque d'Ag et InSb est indié sur la périphérie.

la figure 14 *a*. Il précise l'allure des variations aux niveaux les plus bas et rend sensible le gros écart de puissance entre les lignes excitées (niveau constant à 70 dB) et les lignes non excitées. Dans ces courbes et sur les suivantes (*fig.* 14 *b*, *c* et *d*), le niveau 70 dB correspond à 1 mW utilisable sur chaque ligne excitée.

L'expérimentation a été effectuée avec InSb isolé des lignes et le faible niveau est peut-être dû à un couplage trop faible entre les lignes. Ce point a été vérifié en plaçant InSb en contact direct avec les lignes. Les résultats de l'expérimentation sont reportés sur la figure 14 *b* où ils sont ainsi directement comparables avec ceux obtenus lors de l'expérimentation précédente (*fig.* 14 *a*). Les faits suivants sont constatés :

1° Le niveau sur les lignes excitées est beaucoup plus bas. L'obstacle constitué par InSb est maintenant fortement couplé aux lignes excitées et introduit sur ces lignes un fort taux d'ondes stationnaires; une large partie de l'énergie passant sur la périphérie lorsque InSb est isolé, est maintenant réfléchie. En particulier pour $B = 0$, InSb représente pratiquement un court-circuit placé entre les lignes.

2° La symétrie entre $B > 0$ ou < 0 est moins bonne que dans le cas précédent. La raison est la mauvaise qualité du contact métal-InSb, variant beaucoup avec la pression. En pratique il est presque impossible d'avoir l'égalité des quatre résistances de contact.

3° Mais le niveau recueilli sur les lignes non excitées n'a pratiquement pas varié. Ceci implique une interprétation des plus importantes pour la suite :

— L'énergie utilisable produite par le générateur arrive sous forme d'une onde plane au niveau de InSb. La partie périphérique (entre conducteurs et écran extérieur) est plus ou moins réfléchie suivant la nature de l'obstacle équivalent à InSb placé entre lignes 1 et 3. La partie « centrale » se décompose en deux parties égales, de polarisations circulaires en sens inverse. L'une est réfléchie, l'autre est transmise avec atténuation (le fait que cette atténuation soit si élevée sera expliqué ultérieurement). En raison de l'énormité de la constante diélectrique apparente $\left(\text{à la température ambiante, } \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{ne}{B\omega} \neq 1{,}5.10^6 \quad \text{pour} \quad B = 1\ \text{Wb/m}^2\right)$,

toute l'énergie transmise se trouve localisée dans InSb, que celui-ci soit en contact ou non avec les lignes.

Une autre façon de voir les choses est de considérer les conditions aux limites sur InSb. Pour l'onde qui se propage à l'extérieur le morceau de InSb est presque un court-circuit, une pastille de métal. Le champ électrique sur la périphérie de InSb, à l'extérieur de InSb, est donc normal à la surface. La continuité des composantes tangentielles du champ électrique implique que ce dernier soit également normal à la surface de séparation à l'intérieur de InSb. Si donc toute l'énergie transmise se trouve à l'*intérieur* de InSb, il existe deux possibilités :

a. ou l'onde qui se propage est transversale électrique et magnétique, alors les conclusions de la théorie s'appliquent et le champ électrique devant être perpendiculaire à la paroi et polarisé circulairement ne peut être que nul sur la périphérie « intérieure »;

b. ou alors le champ électrique n'est pas nul, ce qui implique une propagation autre que T. E. M., c'est-à-dire une propagation en guide d'onde circulaire dans InSb. Ce point sera étudié plus en détail dans le chapitre 3. Pour ce qui concerne le présent, dans l'un et l'autre cas, le champ électrique étant ou nul, ou normal à la paroi à l'intérieur de InSb, rien n'est changé selon qu'on place ou non les quatre conducteurs métalliques en contact avec InSb.

Or c'est ce qu'indique l'expérience. Rien n'est changé pour l'effet « Hélicon » lorsqu'on place ou non des contacts métalliques sur la périphérie.

Mais alors, si quatre contacts ont pu être placés, le même raisonnement indique qu'on peut en mettre tout le tour. Ce fait très important permet d'envisager de placer une barrière métallique tout autour de InSb bouchant ainsi l'espace entre conducteurs et écran extérieur et éliminant ainsi les « fuites » sur la périphérie.

Le résultat de cet essai est donné par la figure 14 *c*. Les fuites, représentées en particulier par le niveau sur les lignes excitées 1 et 3 ont considérablement baissé, en fait de l'ordre de 28 dB (presque 1 °/₀₀) par rapport à l'expérience précédente. Cela n'est cependant pas suffisant; en effet, si plus aucune énergie ne passait sur la périphérie (fuites effectivement annihilées), l'énergie recueillie à la sortie devrait être véhiculée par une onde polarisée circulairement. Comme dans la structure de guide d'onde prévue, une polarisation de ce type s'obtient en excitant les quatre lignes par des tensions de phase adéquate, mais d'amplitudes (et donc de puissances) égales, les puissances mesurées à la sortie sur les quatre lignes doivent être égales, même si deux d'entre elles seulement sont excitées à l'entrée.

Le fait qu'il n'en soit rien dans l'expérience 14 *c* signifie que les fuites (ce qui passe en dehors de InSb), sont encore trop importantes.

Or, dans l'expérience 14 *c*, l'énergie incidente peut se retrouver dans InSb (ce qui est le signal utile), puis dans les résistances entre InSb et conducteurs, InSb et barrière métallique transversale, conducteurs et barrière métallique, barrière métallique et écran extérieur. De toutes ces résistances, les plus importantes sont celles entre métal et semi-conducteur (de l'ordre de 0,5 Ω). En conséquence, afin de réduire les fuites, InSb a été indié par galvanoplastie au tampon. En outre, après montage, tous les contacts ont été recouverts au pinceau avec de la laque d'argent et tous les orifices inévitables entre parties, dus aux tolérances mécaniques, également bouchés avec de la laque d'argent.

C'est à ce prix que les courbes du graphique 14 *d* ont pu être tracées. Les résultats obtenus sont tout à fait conformes à ce qui est attendu. Le niveau des fuites pour $B = 0$, est extrêmement bas sur les lignes excitées (90 dB d'atténuation par rapport à la puissance utilisable, soit 10^{-9} seulement de cette puissance) et encore plus bas sur les lignes non excitées, ce qui est évidemment normal. Lorsque B s'éloigne de zéro, soit positivement, soit négativement, les puissances sur les lignes non excitées et excitées tendent bien à être égales et la résonance en $\frac{\lambda}{2}$ est bien observée. Un net changement de pente dans les courbes aux environs de

$$B = 0{,}2 \text{ à } 0{,}3 \text{ Wb/m}^2$$

est même visible. Compte tenu du fait que la résonance en $\frac{1}{2}\lambda$ est observée à environ 0,9 Wb/m², il y a peu de chances d'erreurs d'affirmer qu'il s'agit là de la résonance dimensionnelle en λ, conformément à l'expression établie au paragraphe 2.2.1 :

$$d = p\frac{\lambda_m}{2} = p\frac{\lambda_v}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} = p \cdot \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0}{nef}}\sqrt{B}.$$

où

λ_m, longueur d'onde dans le milieu supposé indéfini;
λ_v, longueur d'onde dans le vide;
c, vitesse de la lumière dans le vide;
p, nombre entier.

Cette expression indique en effet que le produit $p\sqrt{B}$ est constant à fréquence donnée. Si donc la résonance est obtenue en $\frac{\lambda}{2}(p=1)$ pour $B = 0{,}9$ Wb/m², elle est en $\frac{\lambda}{2}$ pour

$$p = 2 \quad \text{et} \quad 2\sqrt{B} = 1 \times \sqrt{0{,}9}, \qquad B = \frac{0{,}9}{4} = 0{,}225 \text{ Wb/m}^2.$$

La résonance est masquée par les fortes pertes à faible induction magnétique.

2.4. Influence de la fréquence; expérimentation en polarisation rectiligne à l'excitation.

Les résultats obtenus à 30 MHz sont suffisamment corrects pour essayer de les rééditer aux fréquences supérieures où l'on doit retrouver des résultats analogues. Les essais ont été effectués, dans les mêmes conditions qu'à la figure 14 *d*, 30 MHz, jusqu'à 1000 MHz et sont consignés dans la figure 15.

Sur toutes les courbes, les résultats caractéristiques de l'effet « Hélicon » sont retrouvés :

— courbes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées;

— égalité des puissances entre lignes excitées et non excitées;

— apparition des maximums d'énergie transmise prévus (résonances en $p\frac{\lambda_m}{2}$).

Ces courbes font apparaître par ailleurs un certain nombre de caractéristiques particulières qu'il faut expliquer :

— Le niveau obtenu à la sortie est indépendant de la fréquence (les écarts sur le maximum d'énergie transmis sont de l'ordre de grandeur des erreurs de mesures); or, si l'angle de perte du matériau est indépendant de la fréquence $\left(\text{tg}\,\delta \quad \frac{1}{\mu B}, \textit{cf.}\right.$ fin du paragraphe 1.3.2$\left.\right)$, la constante diélectrique varie néanmoins dans un rapport de 1 à 33.

— Le niveau d'énergie est excessivement bas. Certes l'angle de pertes est mauvais; à $B = 1$ Wb/m², $\frac{1}{\text{tg}\,\delta} = \mu B = 6$. Une telle valeur ne paraît cependant pas justifier une atténuation de 70 dB.

— Enfin les résultats expérimentaux montrent qu'au fur et à mesure que la fréquence croît, le phénomène « Hélicon » a de plus en plus de mal à émerger du niveau des fuites et nécessite pour cela des valeurs de B d'autant plus élevées que la fréquence est grande.

Le but du paragraphe suivant est de fournir une réponse à ces questions.

2.5. Interprétation des résultats expérimentaux.

Expérimentalement, une onde plane T. E. M., guidée par le système quadrifilaire sous écran, arrive sous incidence normale sur une paroi de In Sb. A cette onde incidente, caractérisée par un champ électrique $\mathcal{E}_i$ et un champ magnétique $\mathcal{H}_i$, est associée la puissance incidente P_i, calculable par l'intermédiaire du flux du vecteur de Poynting à travers la section droite du guide d'ondes. De l'autre côté de In Sb, se propage l'onde transmise, caractérisée par les champs transmis $\mathcal{E}_t$ et $\mathcal{H}_t$ et véhiculant la puissance transmise.

La détermination de la puissance transmise en fonction de la puissance incidente, c'est-à-dire en fait l'étude du rapport

$$\frac{P_t}{P_i}$$

peut donc s'effectuer si les relations entre champs incidents et champs transmis sont connues. Or, soit $\mathcal{E}_i$ le champ incident en un point arbitraire de la paroi de InSb. Si ce champ est polarisé circulairement, In Sb est équivalent à un matériau caractérisé par la constante diélectrique complexe déterminée au paragraphe 1.3.2 de la première partie. Soit ε_c cette constante diélectrique.

On est ainsi ramené (*fig.* 16) à l'étude de la transmission d'une onde électromagnétique par une lame diélectrique d'épaisseur d, l'incidence de l'onde étant

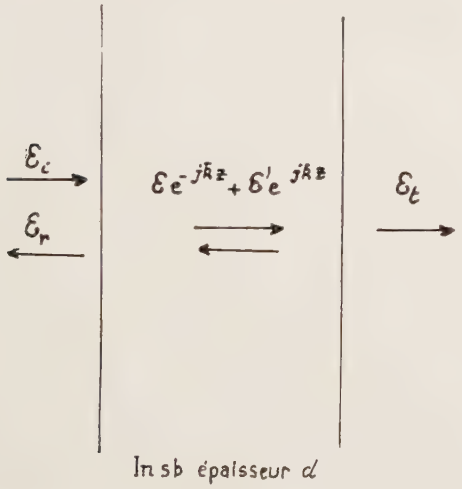


Fig. 16.

normale. En exprimant qu'à l'onde incidente $\mathcal{E}_i$ correspondent :

— une onde réfléchie $\mathcal{E}_r$,

— une onde transmise $\mathcal{E}_t$

et à l'intérieur de la lame une superposition d'ondes progressives (fournissant $\mathcal{E}_t$) et stationnaire (réflections multiples sur les parois), c'est-à-dire

$$\mathcal{E}e^{-jkz} + \mathcal{E}'e^{jkz},$$

l'écriture des conditions de raccordement sur chaque paroi pour les champs électriques et magnétiques permet le calcul de $\mathcal{E}_r$ et $\mathcal{E}_t$ en fonction de $\mathcal{E}_i$. Le calcul est classique et donne :

$$\mathcal{E}_r = \left[1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}\right] \frac{1 - e^{-2j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d}}{\left|1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right|^2 - \left|1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right|^2 e^{-2j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d}} \mathcal{E}_i,$$

$$\mathcal{E}_t = \frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\, e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d}}{\left|1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right|^2 - \left|1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right|^2 e^{-2j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d}} \mathcal{E}_i.$$

L'onde incidente étant une onde plane T. E. M. se déplaçant dans le milieu précédent In Sb, à $\mathcal{E}_i$ est associé le champ magnétique $\mathcal{H}_i$ tel que

$$\mathcal{H}_i = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}[\mathbf{u} \wedge \mathcal{E}_i],$$

$\mathbf{u}$ désignant le vecteur unitaire dans la direction de progagation (ici axe du guide). Il en est de même pour l'onde transmise et à $\mathcal{E}_t$ est associé

$$\mathcal{H}_t = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}[\mathbf{u} \wedge \mathcal{E}_t].$$

Pour chacune de ces ondes, le vecteur radiant complexe est ($\mathcal{H}^*$ = complexe conjugué de $\mathcal{H}$)

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\mathcal{E} \wedge \mathcal{H}^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}[\mathcal{E} \wedge [\mathbf{u} \wedge \mathcal{E}^*]]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}[\mathcal{E}.\mathcal{E}^*].\mathbf{u} - [\mathcal{E}.\mathbf{u}].\mathcal{E}^*],$$

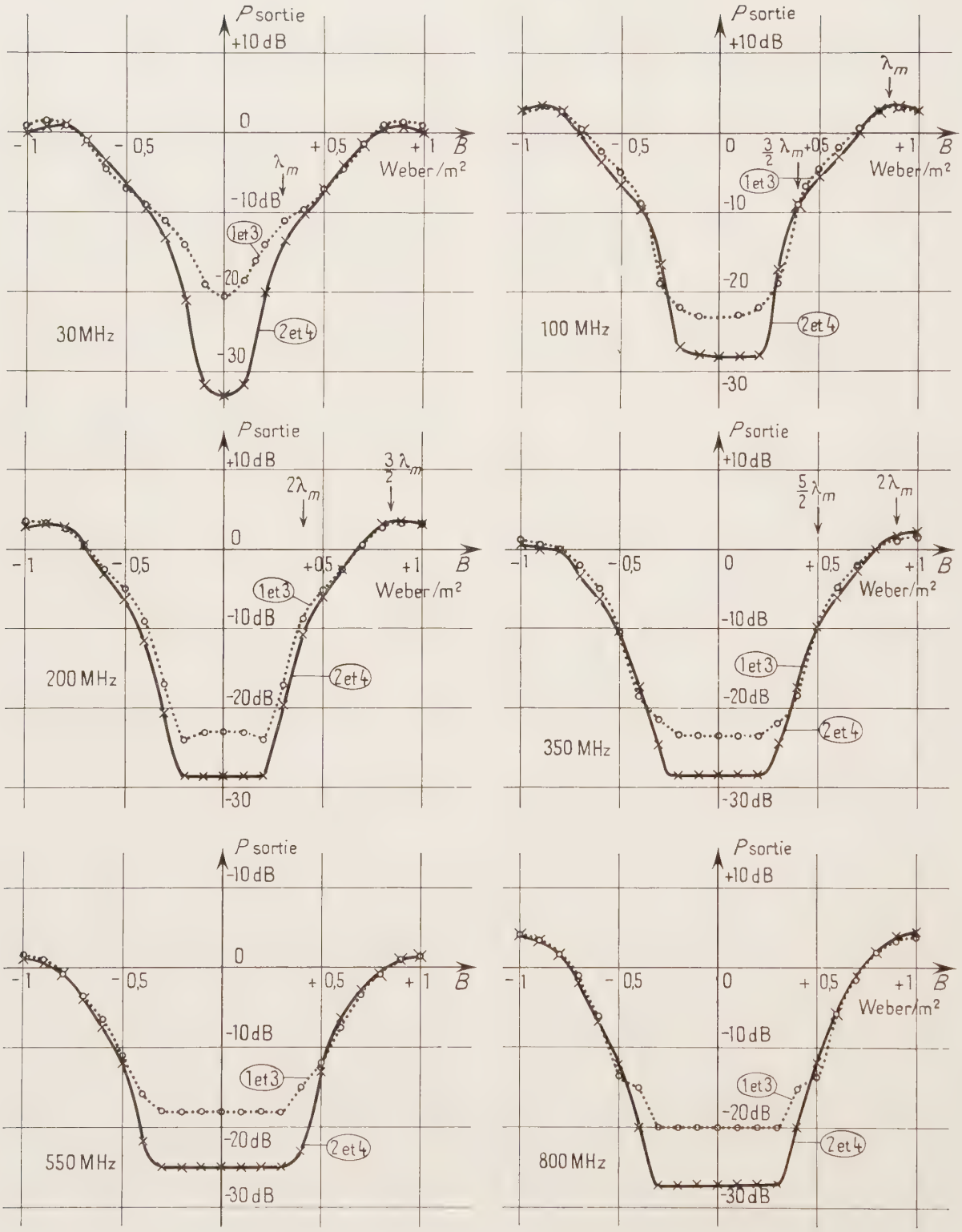
soit

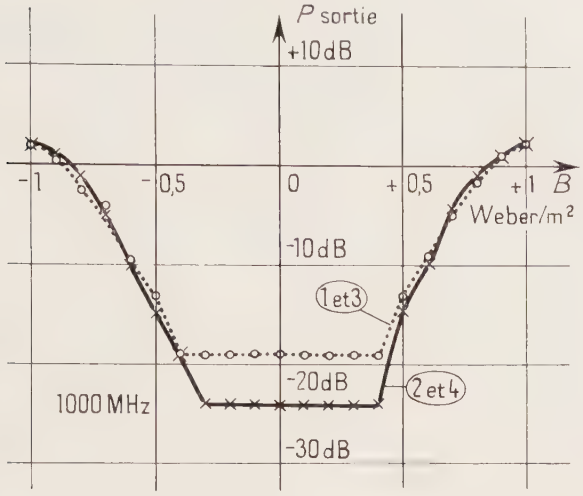
$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\,|\mathcal{E}|^2\mathbf{u}.$$

L'énergie transportée étant donnée par le flux de $\mathcal{R}$ à travers la section droite S du guide, le rapport de la puissance transmise à la puissance incidente s'écrit

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{\iint_S \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\,|\mathcal{E}_t|^2 \mathbf{u}\,d\mathbf{S}}{\iint_S \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\,|\mathcal{E}_i|^2 u\,d\mathbf{S}}$$

$$= \frac{\left\{\iint_S \left|\frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\, e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d}}{\left|1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right|^2 - \left|1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right|^2 e^{-2j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d}}\right|^2 |\mathcal{E}_i|^2 \mathbf{u}\,d\mathbf{S}\right\}}{\iint_S |\mathcal{E}_i|^2 \mathbf{u}\,d\mathbf{S}}.$$


P sortie
+10 dB
0
-10 dB
-20
-30
-1
-0,5
+0,5
+1
B
Weber/m²
λm
1 et 3
2 et 4
30 MHz
100 MHz
3/2 λm
200 MHz
2λm
5/2 λm
350 MHz
550 MHz
800 MHz
-20 dB
-30 dB



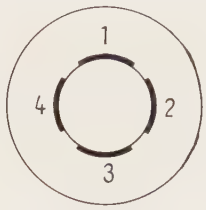


Fig. 15. — Effet « Hélicon ».

Influence de la fréquence, polarisation rectiligne.

InSb, indié sur la périphérie, est en contact avec les conducteurs. Au niveau de InSb, il existe une barrière en laiton, joignant les conducteurs et l'écran extérieur. Tous les contacts sont confirmés à la laque d'argent. Seules les lignes 1 et 3 sont alimentées, en opposition de phase. La variation de la puissance de sortie est traitée pour une seule ligne excitée et pour une seule ligne non excitée. La différence entre lignes de même nature (par exemple 1 et 3) est de l'ordre de $\pm$ 0,3 dB. La puissance utilisable par ligne du générateur d'excitation est 1 mW, correspondant à une référence de 70 dB.

$$\frac{P_t}{P_i} = \left| \frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\, e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d}}{\left[1+\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right]^2 - \left[1-\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right]^2 e^{-2j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d}} \right|^2$$

$$= \left| \frac{\left[1+\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right]^2}{4\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}} e^{+j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d} - \frac{\left[1-\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}\right]^2}{4\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}} e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d} \right|^2,$$

soit finalement

$$\frac{P_t}{P_i} = \left| \frac{1+\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}} \operatorname{sh}\left[j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d\right] + \operatorname{ch}\left[j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d\right] \right|^{-2}.$$

Pour étudier commodément cette relation, un moyen simple est de considérer l'approximation où dans l'effet « Hélicon », les pertes sont négligeables. Alors, selon le sens de la polarisation circulaire :

$$\varepsilon_c = \pm \frac{ne}{B\omega}$$

et, d'une façon plus générale ε est tantôt positif et tantôt négatif (*fig.* 1).

Premier cas : $\varepsilon_c > 0$. — Dans ce cas, il est immédiat de séparer parties réelle et imaginaire et donc d'obtenir le module donnant $\frac{P_t}{P_i}$,

$$\frac{P_t}{P_i} = \left| \frac{1+\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}} j\sin\left[\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d\right] + \cos\left[\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d\right] \right|^2$$

$$= \left\{ \left[\frac{1+\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}} \right]^2 \sin^2\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d\right) + \cos^2\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d\right) \right\}^{-1}.$$

Deuxième cas : $\varepsilon_c < 0$. — Il suffit dans l'expression précédente en sh, ch de remplacer ε_c par $-\varepsilon'$; $\sqrt{\varepsilon_c}$ par $-j\sqrt{\varepsilon'}$:

$$\frac{P_t}{P_i} = \left\{ \left[\frac{1-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}} \right]^2 \operatorname{sh}^2\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}d\right) + \operatorname{ch}^2\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}d\right) \right\}^{-1}.$$

L'allure des résultats obtenus est démontrée en Annexe IV et reproduite sur la figure 17.

Pour $\varepsilon_c > 0$ la puissance transmise varie, suivant ε_c, entre la valeur maximale P_i et des minimums fonction de ε_c. Les maximums correspondent à

$$\sin\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}d\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = p\frac{1}{f\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}} = p\frac{\lambda_m}{2},$$

c'est-à-dire aux résonances dimensionnelles prévues. La courbe oscille de plus en plus rapidement lorsque ε_c croît et se trouve mathématiquement indéterminée pour $\varepsilon_c \to \infty$. Comme les très fortes valeurs de ε_c s'obtiennent pour B faible et qu'alors

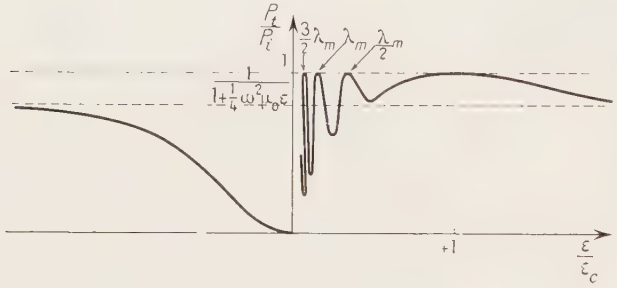


Fig. 17.

l'approximation des pertes nulles n'est plus acceptable, cette zone est physiquement sans intérêt.

Pour $\varepsilon_c < 0$ la puissance transmise décroît régulièrement avec $|\varepsilon_c|$ et tend vers zéro pour $\varepsilon_c \to \infty$.

L'intérêt des courbes précédentes est qu'on peut en déduire ce qui se passe dans le cas réel où il y a des pertes et tracer, en se basant sur les courbes des figures 1 et 2, l'allure de ce qui doit être trouvé expérimentalement.

Dans la zone où l'effet « Hélicon » joue sans pertes, $\varepsilon_c = \pm \frac{ne}{B\omega}$ et par conséquent la courbe $\frac{P_t}{P_i}(B)$ est à une graduation de l'axe des abscisses près, la courbe tracée précédemment $\left(\text{puisque } \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = \frac{\varepsilon\omega}{ne} B\right)$. Par ailleurs, la courbe réelle s'écarte des résultats précédents lorsque B est très élevé ou faible (*fig.* 18).

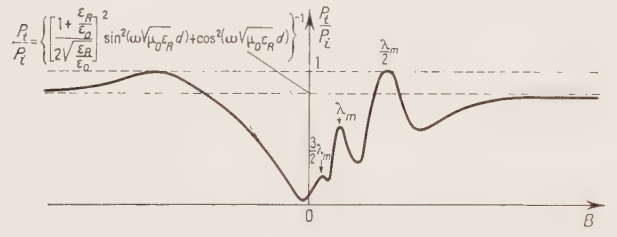


Fig. 18. — Les pertes diminuent rapidement avec B croissant. La résonance dimensionnelle $\frac{\lambda_m}{2}$ se trouve dans une zone à pertes nulles. Les autres résonances sont atténuées.

1° $B > 0$ *élevé* : Alors $\varepsilon_c \to \varepsilon_R$, constante diélectrique usuelle du matériau. Si InSb est dans l'air, ce qui est le cas de l'expérimentation, alors $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}$ ne saurait tendre vers l'infini, ni même atteindre la valeur 1. En conséquence la puissance transmise oscille lorsque B croît, trouve son dernier maximum pour $d = \frac{\lambda_m}{2}$, puis tend vers une limite donnée par

$$\frac{P_t}{P_i} = \left\{ \left[\frac{1 + \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_0}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_0}}} \right]^2 \sin^2\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_R}\, d\right) + \cos^2\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_R}\, d\right) \right\}^{-1}.$$

En raison de l'énormité de la constante diélectrique apparente « Hélicon », d est faible pour obtenir les résonances dimensionnelles. Le terme $\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_R}\, d$ est également petit; dans le cas de l'expérimentation :

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_R}\, d = 6{,}6 \cdot 10^{-3} \quad \text{à} \quad 30 \text{ MHz},$$
$$= 1{,}4 \cdot 10^{-1} \quad \text{à } 2\,000 \text{ MHz}.$$

Par conséquent :

$$\frac{P_t}{P_i} \# \left\{ 1 + \omega^2\mu_0\varepsilon_R d^2 \left[\frac{1 + \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_0}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_0}}} \right]^2 \right\}^{-1};$$

à 30 MHz :

$$\frac{P_t}{P_i} \# 1$$

à 2 000 MHz :

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{1}{1 + 0{,}93}.$$

Il sera donc tenu compte de ce phénomène en plaçant, pour $B \to \infty$, une asymptote à la courbe différente de l'unité. Pratiquement d'ailleurs, cette zone ne sera pas atteinte.

2° $B > 0$ *faible* : Il sera admis ici que l'axe de symétrie des figures 1 et 2 peut être confondu avec l'axe des ordonnées. Ce fait a été signalé à la fin du paragraphe 1.3.2 et illustré par la courbe de la figure 3. Sous cette approximation ε_c reste > 0 mais les pertes apparaissent. L'effet de ces pertes ne peut être que de diminuer la valeur des maximums et même de les masquer totalement. En particulier si la résonance en $\frac{\lambda_m}{2}$ tombait dans cette zone, la courbe $\frac{P_t}{P_i}(B)$ pourrait être une courbe uniformément croissante avec B (*fig.* 18 et 19).

Pour $B = 0$, les pertes n'étant pas infinies, une fraction de puissance passe. Soit P_{t_0} cette puissance.

3° $B < 0$ *faible* : Pour $|B|$ très faible, à l'effet des pertes s'ajoute l'effet d'une constante diélectrique négative. La puissance transmise doit encore diminuer par rapport à P_{i_0}. Puis $|B|$ augmentant, les pertes diminuent, la constante diélectrique devient moins négative, la puissance remonte et se raccorde à la courbe théorique sans perte.

4° $B < 0$ *élevé* (pour mémoire, les valeurs de B relatives aux phénomènes qui vont être décrits ne sont pas atteintes expérimentalement) : Lorsque $|B|$ est très élevé, il arrive un moment où la constante diélectrique s'annule. La courbe réelle coupe alors l'asymptote

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\omega^2 \mu_0 \varepsilon}$$

des courbes sans pertes de la figure 17. Ensuite ε_t atteint la valeur ε et pour ce point :

$$\frac{P_t}{P_i} = 1,$$

puis tend vers ε_R et la puissance transmise tend à nouveau vers l'asymptote obtenue pour $B > 0$ élevé.

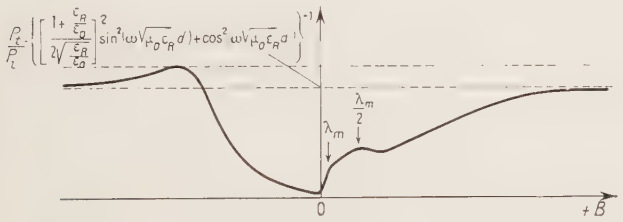


Fig. 19. — Les pertes diminuent lentement avec B croissant. La résonance $\frac{\lambda_m}{2}$ se trouve fortement atténuée et amortie. La résonance λ_m est à peine sensible.

Les courbes réelles correspondant aux cas expérimentaux sont à tracer point par point en utilisant les deux relations

$$\frac{P_t}{P_i} = \left| \frac{1 + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}} \operatorname{sh}\left(j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}\,d\right) + \operatorname{ch}\left(j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}\,d\right) \right|^{-2},$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_R - \frac{ne^2}{m\omega} \frac{1}{\omega + \omega_c - \frac{j}{\tau}}.$$

De telles courbes théoriques sont tracées sur la figure 20. Comme pour les calculs, B n'est limité par aucun électroaimant, les résultats sont calculés jusqu'à 1,9 Wb/m² et les fréquences choisies pour détacher au mieux les résonances dimensionnelles. Les courbes ont l'allure théoriquement prévue et qui correspond aux données expérimentales. Elles ont été tracées pour un niveau de référence arbitraire de 100 dB et il est constaté à nouveau que à B donné, le niveau est sensiblement indépendant de la fréquence et que l'atténuation est considérable; mais cette fois, en se référant à l'expression de $\frac{P_t}{P_i}$ l'explication de ces faits peut être fournie; en effet, les ordres de grandeur sont tels que la constante ε_c peut s'écrire (pour l'onde transmise) :

$$\varepsilon_c \# \frac{ne^2}{m\omega} \frac{1}{\omega_c + \frac{j}{\tau}} = \frac{ne^2\tau}{m\omega\omega_c\tau} \left[\frac{1}{1 + \frac{j}{\omega_c\tau}} \right],$$

mais

$$\frac{e\tau}{m} = \mu \quad \text{et} \quad \omega_c\tau = \frac{eB\tau}{m} = \mu B,$$

donc

$$\varepsilon_c \# \frac{ne}{B\omega} \left[\frac{1}{1 + \frac{j}{\mu B}} \right] \# \frac{ne}{B\omega} \left[1 - j\frac{1}{\mu B} \right]$$

si μB est assez grand.

Posons $\varepsilon_1 = \frac{ne}{B\omega}$ (c'est la constante diélectrique « Hélicon » lorsque les pertes sont négligeables)

$$\varepsilon_c = \varepsilon_1 \left[1 - j\frac{1}{\mu B} \right]$$

et comme par hypothèse μB est grand :

$$\sqrt{\varepsilon_c} \# \sqrt{\varepsilon_1} \left[1 - \frac{j}{2\mu B} \right].$$

Par ailleurs

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \left[1 - \frac{j}{\mu B} \right]$$

et dans le cas le plus défavorable pour la valeur de $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$ (B élevé et ω élevé, soit dans les conditions de l'expérience $B = 1$ Wb/m², $f = 1000$ MHz, température ambiante) :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 1{,}6 \cdot 10^4,$$

La connaissance de ces ordres de grandeur va permettre d'obtenir une expression simple pour le

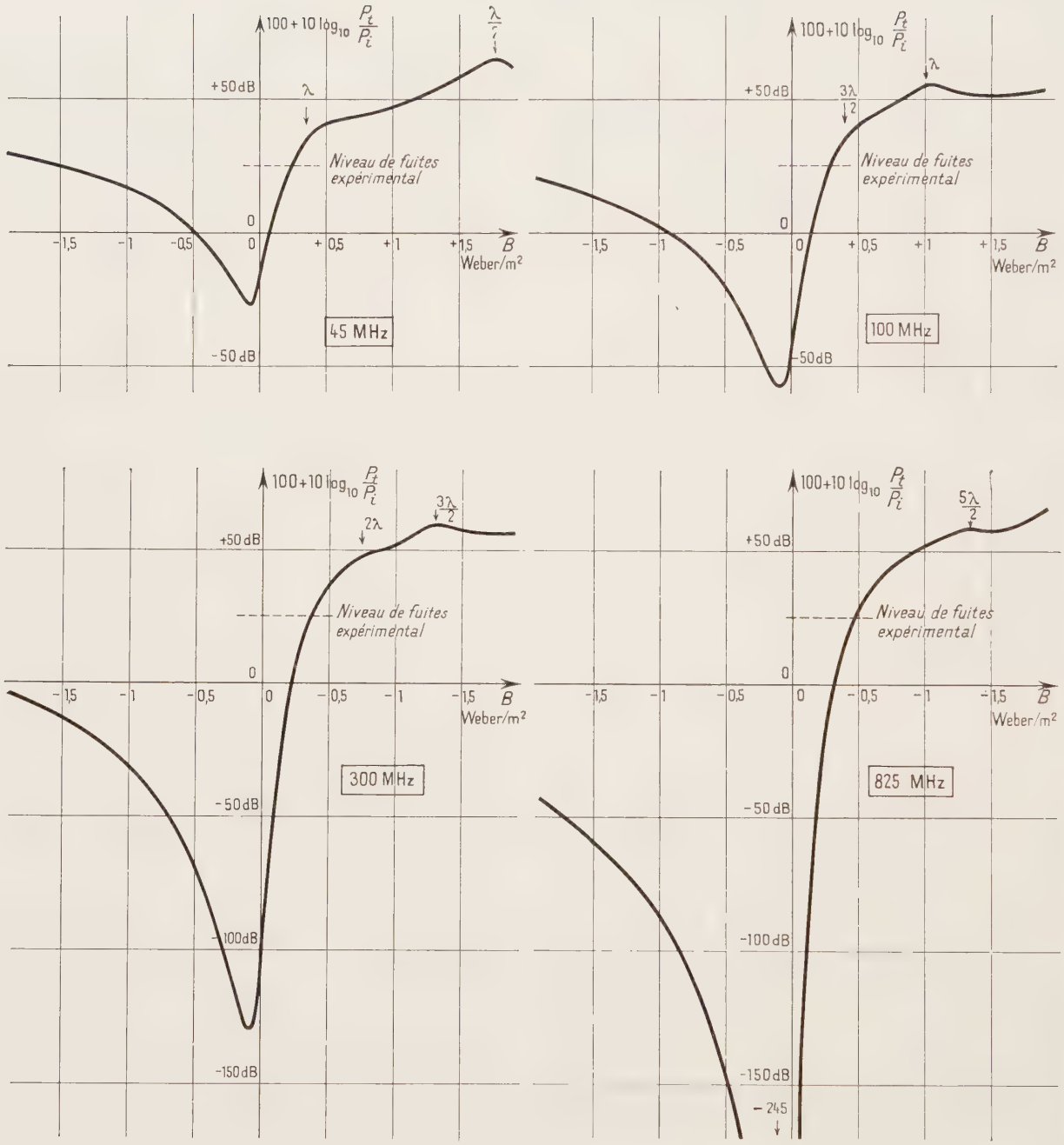


Fig. 20. — Courbes théoriques du rapport de la puissance transmise par une lame de In Sb (d'épaisseur $d = 4{,}32$ mm, la concentration en électrons étant $1{,}6.10^{22}/m^3$ et la mobilité $6\ m^2/V.s$) supposée infinie transversalement, à la puissance incidente transportée par une onde électromagnétique plane, polarisée circulairement, dont le plan de polarisation est parallèle à la lame de In Sb. L'effet « Hélicon » est obtenu par l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$, perpendiculaire aux faces de la lame de In Sb; son signe traduit le sens de polarisation de l'onde incidente.

rapport $\frac{P_f}{P_i}$ En effet :

$$\frac{P_f}{P_i} = \left| \frac{1 + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}}} \operatorname{sh}\left[j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d \right] + \operatorname{ch}\left[j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d \right] \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}} \operatorname{sh}\left[\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} + j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d \right] + \operatorname{ch}\left[\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} + j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d \right] \right|^2.$$

En se plaçant alors à une valeur de B correspondant à une résonance dimensionnelle, alors

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d = p\pi.$$

En développant sh et ch :

$$\frac{P_f}{P_i} = \left| \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}} \operatorname{sh}\left(\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} \right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} \right) \right|^{-2}$$

Il est alors licite de négliger le terme complexe de $\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}\left[1 - \frac{j}{2\mu B} \right]$:

$$\frac{P_f}{P_i} = \left| \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \operatorname{sh}\left(\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} \right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} \right) \right|^{-2}.$$

Or pour une valeur de B suffisamment grande pour que les approximations précédentes soient valables,

$$\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} \quad \text{est voisin de l'unité.}$$

[Il est en fait égal à $\frac{p}{2}\frac{\pi}{\mu B}$ et même si l'on prend une résonance dimensionnelle d'ordre élevé, par exemple en $6\frac{\lambda_m}{2}(p = 6)$:

$$\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} = \frac{3\pi}{\mu B},$$

soit pour $\mu = 6\ \mathrm{m^2/V.s}$; $B = 1\ \mathrm{Wb/m^2}$,

$$\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} = 1{,}57. \,]$$

Compte tenu du coefficient multiplicateur $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}$ devant le sinus, le cosinus hyperbolique est alors négligeable et, sur les résonances dimensionnelles :

$$\frac{P_f}{P_i} \simeq \left\{ \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{sh}^2\left(\frac{p\pi}{2\mu B} \right) \right\}^{-1} = \left\{ \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} \right) \right\}^{-1}.$$

Ainsi à un coefficient $\frac{1}{4}$ près, le rapport $\frac{P_f}{P_i}$ se présente sous forme d'un produit de deux termes dont l'un $\left(\operatorname{sh}^2 \frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} \right)$ traduit les pertes effectivement dues à la traversée d'un milieu diélectrique d'épaisseur d et d'angle de perte relié au produit μB et l'autre représente la désadaptation entre milieu In Sb *et milieu environnant.*

Il est immédiat de voir que c'est en fait cette désadaptation qui est responsable du faible niveau rencontré expérimentalement. Soit en effet l'expérimentation à 100 MHz, la résonance est en λ_m à peu près à $B = 1\ \mathrm{Wb/m^2}$. Alors

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 4{,}6.10^5,$$

$$\frac{\pi}{\mu B} = \frac{\pi}{6} = 0{,}523,$$

$$\operatorname{sh}\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} = 0{,}547,$$

$$\frac{P_f}{P_i} = \left[\frac{1}{4} \times 4{,}6.10^5 \times 0{,}3 \right]^{-1},$$

soit une perte de 45,4 dB (14) dont il est visible que la cause se trouve dans le terme $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 4{,}6.10^5$.

Sur la base de cet ensemble de résultats, il devient alors facile d'interpréter les résultats laissés sans explication au paragraphe 2.4.

Niveau de sortie indépendant de la fréquence à niveau d'entrée constant. — En première approximation :

$$\operatorname{sh}\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B} \simeq \frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\, d}{2\mu B},$$

alors

$$\frac{P_f}{P_i} \simeq \left[\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_1 d^2}{4\mu^2 B^2} \right]^{-1},$$

comme $\varepsilon_1 = \frac{ne}{B\omega}$, le terme fréquence disparaît de l'expression. Physiquement, lorsque la fréquence augmente, les pertes subies lors de la traversée de In Sb augmentent $\left(\text{terme en } \frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_1 d^2}{4\mu^2 B^2} \right)$ traduisant

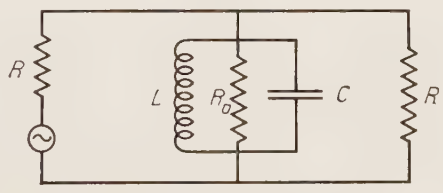
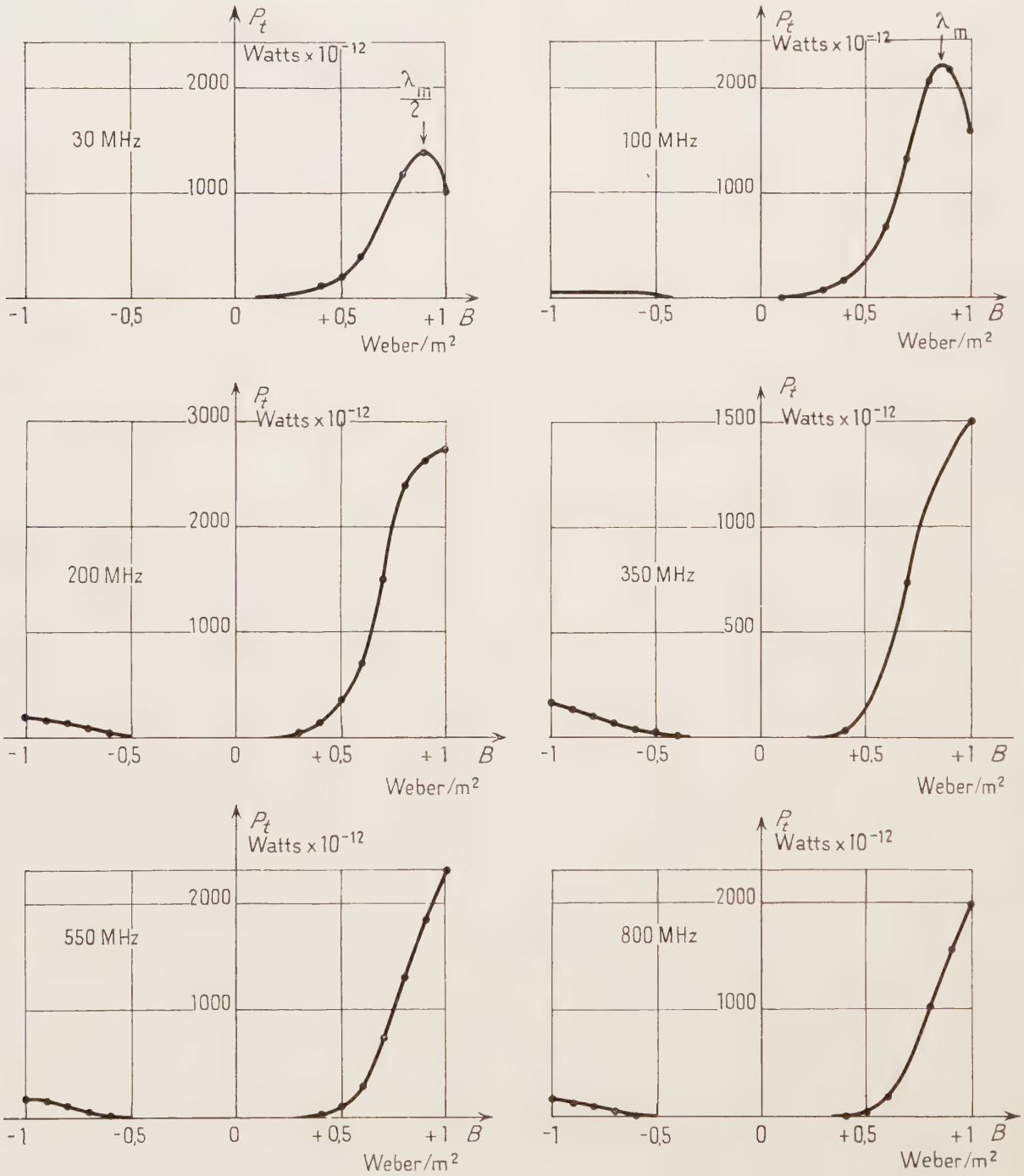


Fig. 21.

(14) Contre 45,6 dB avec le calcul sans approximations, ce qui montre la validité de la formule approchée.

l'augmentation de la distance (exprimée en longueurs d'onde dans le milieu) parcourue par l'onde dans un milieu diélectrique à angle de perte constant. Mais en raison de la variation spéciale de ε_1 en $\frac{1}{\omega}$, les pertes par désadaptation diminuent lorsque f croît, les deux phénomènes se compensant en première approximation.

Bas niveau d'énergie de sortie. — Il vient d'être montré que la cause est la désadaptation entre milieux de propagation. Une analogie électrique simple peut en être fournie sous la forme d'un circuit oscillant excité par un générateur à forte impédance interne R et chargé par une résistance R, la résistance d'antirésonance propre du circuit oscillant étant R_0 (*fig.* 21).



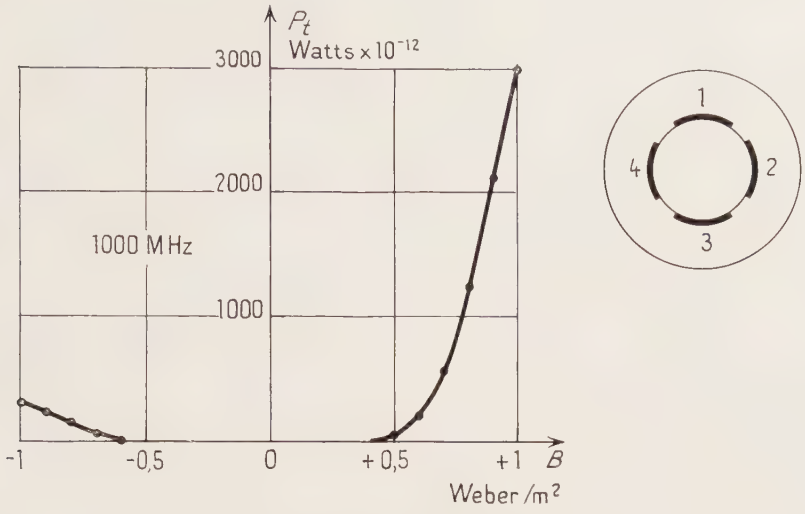


Fig. 22. — Effet « Hélicon ».

Influence de la fréquence. Essai en polarisation circulaire. InSb, indié sur la périphérie, est en contact avec les conducteurs. Au niveau de InSb existe une barrière en laiton, joignant les conducteurs et l'écran extérieur.
Tous les contacts sont confirmés à la laque d'argent.
Les lignes 1 et 3 sont alimentées avec des tensions égales opposées en phase; il en est de même des lignes 2 et 4; en outre la tension en 1 est en quadrature avec la tension en 2.
La variation de la puissance de sortie concerne la somme des puissances mesurées sur les quatre lignes, la puissance utilisable d'excitation par ligne étant 1 mW.
Pour $f = 30$ MHz et $B < 0$, la puissance de sortie est tellement basse que la courbe se confond avec l'axe des abscisses à l'échelle de la figure.

— Si le circuit est sans pertes, R_0 est infini et, à l'accord du circuit oscillant toute l'énergie utilisable du générateur est fournie à la charge.

— Si le circuit a de *faibles* pertes, se traduisant par une bonne surtension Q, mais que l'inductance soit très faible, alors R_0 peut être petit devant R. La résistance de charge R est alors shuntée par R_0 et reçoit fort peu de puissance, même à l'accord du circuit oscillant.

Par ailleurs, à $B = 0{,}8$ Wb/m² où se situent la plupart des résonances dimensionnelles expérimentales, l'expérience indique en moyenne 68 dB de pertes et les courbes théoriques, 50 dB. Une partie de la différence peut être expliquée par le raisonnement suivant :

Soit P la puissance utilisable fournie à une ligne excitée; il s'agit alors de la référence de 70 dB des relevés expérimentaux. Comme deux lignes sont excitées, la puissance utilisable fournie au guide d'onde est $2P$. Étant donné la géométrie du guide d'onde, il y a environ P au centre entre les quatre conducteurs, et P sur la périphérie. Il y a donc $\frac{P}{5}$ sur chaque polarisation circulaire au centre. L'onde transmise subit son atténuation théorique de 50 dB et émerge de InSb; sortant en polarisation circulaire, l'énergie se répartit également sur les quatre lignes (fait vérifié expérimentalement); il y a donc, par ligne

$$\frac{P}{5} \times 10^{-5} \times \frac{1}{4}$$

et par rapport au niveau de référence P, l'atténuation apparente est $\frac{1}{8} \times 10^{-5}$ soit 59 dB contre 68 dB mesurés. En fait la répartition d'énergie entre centre et périphérie du guide, supposée ici à puissance égale dans les deux parties, n'est pas connue. Lors d'expériences quantitatives qui seront décrites ultérieurement, un bon accord a été trouvé entre atténuations théorique et mesurée.

Nécessité de valeurs de B élevées pour émerger du niveau de fuites lorsque la fréquence croît. — Le phénomène est également nettement visible sur les courbes de la figure 20 où l'ordre de grandeur du niveau de fuites expérimental a été fixé (il est d'environ 30 dB en dessous de la valeur à $B = 1$ Wb/m² à 100 MHz). La raison est donc l'augmentation des pertes à $B = 0$ lorsque f croît (InSb est alors presque un conducteur et la profondeur de pénétration diminue avec la fréquence). L'effet « Hélicon » a donc un handicap, pour devenir notable, d'autant plus grand que la fréquence est élevée.

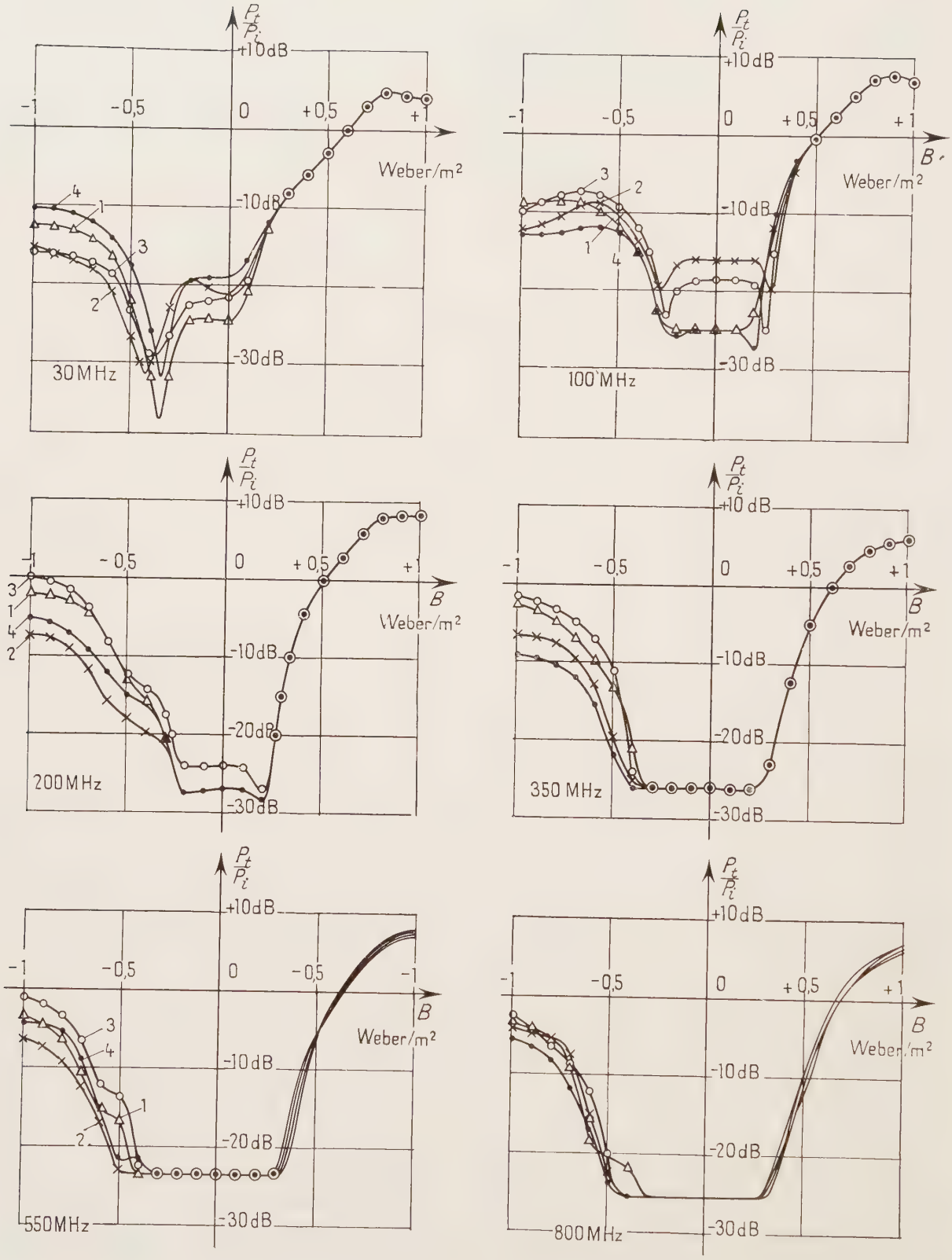

$\frac{P_t}{P_i}$
+10dB
-10dB
-20dB
-30dB
-1
-0,5
0
+0,5
+1
B
Weber/m²
30MHz
100MHz
200MHz
350MHz
550MHz
800MHz
1
2
3
4

Fig. 23.

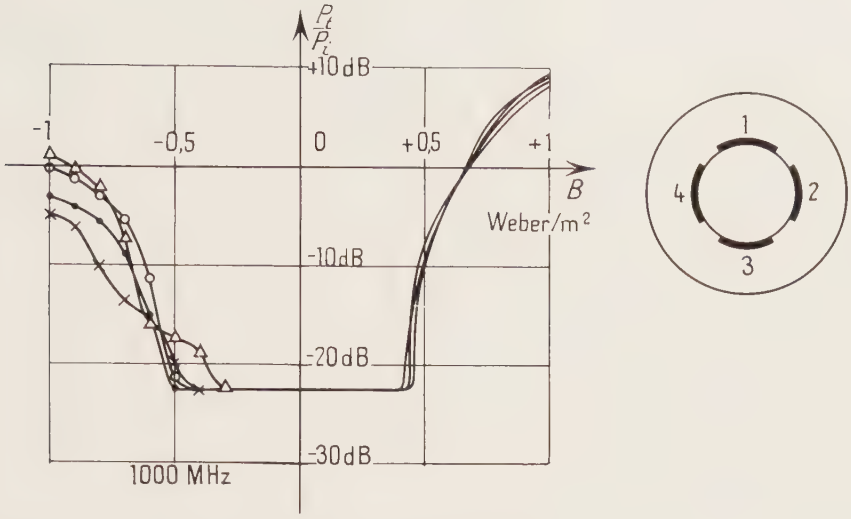


Fig. 23. — Effet « Hélicon ».

Influence de la fréquence. Essai en polarisation circulaire. In Sb, indié sur la périphérie, est en contact avec les conducteurs.

Au niveau de In Sb, existe une barrière en laiton joignant les conducteurs et l'écran extérieur.

Tous les contacts sont confirmés à la laque d'argent.

Les lignes 1 et 3 sont alimentées avec des tensions égales opposées en phase; il en est de même des lignes 2 et 4; en outre la tension en 1 est en quadrature avec la tension en 2.

La variation de la puissance de sortie est tracée pour chaque ligne, sauf aux endroits où l'échelle utilisée les rend pratiquement confondues.

La puissance utilisable par ligne excitée est de 1 mW, correspondant à un niveau de 70 dB sur la graduation d'ordonnées utilisée.

2.6. **Expérimentation en polarisation circulaire.**

Cette expérience est certainement la plus spectaculaire à faire car elle peut se résumer comme suit :

Pour un sens de polarisation circulaire donné, l'énergie doit être transmise pour un sens de l'induction magnétique B, ne doit pas être transmise si ce sens est inversé.

En tenant compte des pertes, l'allure des courbes théoriques des figures 20 doit en fait être retrouvée et l'est effectivement (*fig.* 22). Les résultats expérimentaux sont reportés sur la figure 22, en échelle linéaire, pour bien illustrer que dans un sens l'énergie passe et que dans l'autre sens, elle ne passe pas, et sur la figure 23, en décibels pour bien voir ce qui se passe aux bas niveaux.

Les caractéristiques prévues sont bien trouvées :

— niveau indépendant de la fréquence;

— existence dans le sens « passant » des résonances dimensionnelles ainsi que leur inexistence dans le sens non passant.

Notons enfin que les ondulations et la séparation des courbes de puissances sur les quatre lignes dans le sens non passant est dû à la combinaison de ce qui passe par les fuites avec une phase inconnue et de ce qui passe par effet « Hélicon». Le phénomène apparaît d'ailleurs également dans le sens « passant » dès que le niveau devient de l'ordre de grandeur des fuites.

ANNEXE I.

ACTION D'UNE INDUCTION MAGNÉTIQUE CONTINUE SUR UN PORTEUR. EFFET CYCLOTRON.

L'effet cyclotron est d'importance capitale pour l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique dans un semi-conducteur sous l'influence d'une induction magnétique continue. Aussi, bien que déjà largement décrite dans de nombreux Ouvrages, sa théorie est-elle rappelée ici. Ce rappel permet en outre de préciser les notations qui se retrouvent tout au long de l'étude de l'effet « Hélicon » et de déterminer la position du plan de la rotation cyclotron dans le cas général d'un porteur de masse apparente anisotrope et d'une induction magnétique continue

de direction quelconque. La position de ce plan, importante, pour l'effet « Hélicon », n'est pas en effet précisée en général.

Action d'une induction magnétique continue sur un porteur de charge. Effet cyclotron.

L'effet cyclotron est relatif au mouvement d'un porteur, sous l'influence d'une induction magnétique continue $\boldsymbol{B}$, entre deux collisions.

En utilisant le modèle de Drude Zener pour les porteurs de charge électrique, il suffit de déterminer la vitesse moyenne qui est donnée par la relation fondamentale de la Dynamique :

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) = \left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{F}). \qquad (A.1)$$

Dans cette relation, $\mathbf{F}$ désigne la résultante des forces appliquées au porteur; $\frac{1}{m}$ désigne l'inverse de la masse du porteur.

Usuellement la masse des porteurs dans les semiconducteurs n'est pas scalaire; mais il est connu qu'en première approximation, l'équation fondamentale de la Dynamique reste valable à condition d'utiliser des notations adéquates. Dans tout ce qui suit, le calcul matriciel sera largement utilisé en raison de sa simplicité et de son adaptation parfaite au problème traité. Il est ainsi convenu que dans l'équation (A.1) (ou toute équation ultérieurement utilisée), toute notation de vecteur

$$(\mathbf{V})$$

représentera la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix},$$

V_1, V_2, V_3 représentant les composantes de $\mathbf{V}$ sur trois axes de référence rectangulaires; toute notation non vectorielle telle que

$$\left(\frac{1}{m}\right)$$

représentera une matrice carrée, soit, pour la masse apparente des porteurs :

$$\left(\frac{1}{m}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{11}} & \frac{1}{m_{12}} & \frac{1}{m_{13}} \\ \frac{1}{m_{21}} & \frac{1}{m_{22}} & \frac{1}{m_{23}} \\ \frac{1}{m_{31}} & \frac{1}{m_{32}} & \frac{1}{m_{33}} \end{bmatrix}.$$

Bien entendu les axes de repérage seront de préférence choisis pour rendre ces matrices aussi simples que possible. En particulier, dans le cas étudié de l'effet cyclotron, les calculs sont simplifiés par le choix d'axes de référence tels que la matrice d'inverse de masse soit diagonale, ce qui revient à choisir dans l'espace des vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ associés au porteur, les axes principaux de l'ellipsoïde équivalente localement aux surfaces à énergie constante.

Il est connu que vitesse $(\mathbf{V})$ et vecteur d'onde $(\mathbf{k})$ sont liés par

$$(\mathbf{V}) = \left(\frac{1}{m}\right)(\hbar\mathbf{k}) = \hbar \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{bmatrix} (\mathbf{k})$$

$$\left(\hbar = \frac{h}{2\pi},\ h = \text{Cte de Planck}\right),$$

ce qui permet d'écrire l'équation (A.1) sous la forme

$$\frac{d(\hbar\mathbf{k})}{dt} = (\mathbf{F}) = q(\mathbf{V} \wedge \boldsymbol{B}). \qquad (A.2)$$

Cette équation implique que, dans l'espace des vecteurs d'onde $\mathbf{k}$, la dérivée de $\mathbf{k}$ par rapport au temps est perpendiculaire à $\mathbf{V}$ et $\boldsymbol{B}$. Or il est connu par ailleurs que, E désignant l'énergie de la particule :

$$(\mathbf{V}) = \frac{1}{\hbar}(\mathbf{grad}_k E) = \frac{1}{\hbar}\begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial k_1} \\ \frac{\partial E}{\partial k_2} \\ \frac{\partial E}{\partial k_3} \end{bmatrix},$$

autrement dit $\mathbf{V}$ est normal aux surfaces à énergie constante assimilées ici à des ellipsoïdes.

Donc :

$\frac{d\mathbf{k}}{dt}$ est situé dans le plan tangent à la surface à énergie constante au point correspondant au vecteur $\mathbf{k}$ considéré $\left(\text{puisque } \frac{d\mathbf{k}}{dt} \text{ est perpendiculaire à } \mathbf{V}\right)$ et est normal à $\boldsymbol{B}$. Le lieu de l'extrémité de $\mathbf{k}$ lorsque t varie est par conséquent une ellipse definie par l'intersection d'un plan perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$ et passant par l'extrémité de $\mathbf{k}_0$ (valeur initiale de $\mathbf{k}$), et l'ellipsoïde à énergie constante correspondant à $\mathbf{k}_0$.

Il reste à déterminer comment $\mathbf{k}$ décrit l'ellipse en fonction du temps, ce qui s'effectue en résolvant le système

$$\frac{d(\hbar\mathbf{k})}{dt} = q(\mathbf{V} \wedge \boldsymbol{B}),$$

$$(\mathbf{V}) = \left(\frac{1}{m}\right)(\hbar\mathbf{k}),$$

ce qui, par élimination de **V**, conduit au système différentiel du premier ordre :

$$\left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right) = qB \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{m_2} & -\frac{\beta}{m_3} \\ -\frac{\gamma}{m_1} & 0 & \frac{\alpha}{m_3} \\ \frac{\beta}{m_1} & -\frac{\alpha}{m_2} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{k}) = (A)(\mathbf{k})$$

avec

$$(\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} \alpha B \\ \beta B \\ \gamma B \end{pmatrix}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

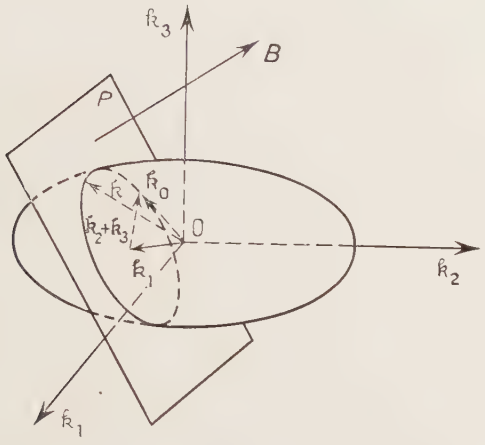


Fig. A. 1.

Ce système est résolu par la recherche des valeurs propres de la matrice (A), soit les valeurs du paramètre λ, solution du déterminant

$$\begin{vmatrix} -\lambda & qB\frac{\gamma}{m_2} & -qB\frac{\beta}{m_3} \\ -qB\frac{\gamma}{m_1} & -\lambda & qB\frac{\alpha}{m_3} \\ qB\frac{\beta}{m_1} & -qB\frac{\alpha}{m_2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$\lambda\left[\lambda^2 + q^2B^2\frac{\alpha^2 m_1 + \beta^2 m_2 + \gamma^2 m_3}{m_1 m_2 m_3}\right] = 0.$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = j\omega_c, \qquad \lambda_3 = -j\omega_c,$$

avec

$$\omega_c = qB\left[\frac{\alpha^2 m_1 + \beta^2 m_2 + \gamma^2 m_3}{m_1 m_2 m_3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

d'où la solution cherchée :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 e^{j\omega_c t} + \mathbf{k}_3 e^{-j\omega_c t}.$$

Les vecteurs $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ sont déterminables en tant que vecteurs propres de (A) et par les conditions initiales. En particulier, $\mathbf{k}_1$ vecteur constant du mouvement est manifestement le vecteur joignant l'origine des axes au centre de l'ellipse lieu de l'extrémité de $\mathbf{k}$ (*fig.* A. 1). En tant que vecteur propre de (A) pour la valeur propre $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{k}_1$ vérifie la relation

$$(A)(\mathbf{k}_1) = \lambda_1 \mathbf{k}_1 = 0,$$

ce qui implique

$$(\mathbf{k}_1) = K_1 \begin{pmatrix} \alpha m_1 \\ \beta m_2 \\ \gamma m_3 \end{pmatrix},$$

K_1, nombre réel (puisque $\mathbf{k}_1$ est vecteur réel) dépendant des conditions initiales.

A l'instant initial $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$; le vecteur $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ est donc également un vecteur réel situé dans le plan de l'ellipse, qui est perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$ (*fig.* A. 1).

En conséquence :

$$[\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3].\boldsymbol{B} = 0,$$

cette relation sera utile dans ce qui suit.

Le mouvement du porteur se déduit immédiatement de celui de l'extrémité de $\mathbf{k}$. En effet, soit $\mathbf{r}$ le vecteur repérant depuis l'origine des axes choisis la position du porteur, alors

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = (\mathbf{V}) = \hbar\left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{k})$$
$$= \hbar\left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{k}_1 + [\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3]\cos\omega_c t + j[\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3]\sin\omega_c t)$$

soit

$$(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}_0) + \hbar\left(\frac{1}{m}\right) \times \left(\mathbf{k}_1 t + \frac{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3}{\omega_c}\sin\omega_c t - j\frac{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}{\omega_c}\cos\omega_c t\right),$$

expression dont l'interprétation est immédiate :

A partir de la position initiale $\mathbf{r}_0$ le porteur décrit une hélice elliptique; l'axe de cette ellipse est définie par le vecteur

$$\left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{k}_1).$$

La composante de rotation s'effectue dans un plan défini par les vecteurs

$$\left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \quad \text{et} \quad j\left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3).$$

Ces caractéristiques géométriques importantes peuvent être précisées. En effet

$$\left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{k}_1) = A_1\begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha m_1 \\ \beta m_2 \\ \gamma m_3 \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

en conséquence l'axe de l'hélice elliptique est parallèle à l'induction magnétique.

Par contre, le mouvement de rotation s'effectue dans un plan qui n'est pas en général orthogonal à $\boldsymbol{B}$. En effet, puisque

$$[\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3].\boldsymbol{B} = 0,$$

en général $\left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)$ ne peut être perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$, sauf dans le cas particulier où la masse du porteur est isotrope; l'hélice est alors circulaire, l'ellipsoïde de la figure A. 1 se ramenant à une sphère.

Un vecteur orthogonal au plan de rotation doit être orthogonal aux deux vecteurs

$$\left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{m}\right)(j\mathbf{k}_2 - j\mathbf{k}_3).$$

Or il découle de l'expression de $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + [\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3]\cos\omega_c t + j[\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3]\sin\omega_c t$$

que $j[\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3]$ est également un vecteur réel situé dans le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$, puisque $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ et $j[\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3]$ définissent le plan de l'ellipse, lieu de l'extrémité de $\mathbf{k}$. Donc

$$[\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3].\boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{et} \qquad j[\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3].\boldsymbol{B} = 0.$$

Il est immédiat de vérifier alors que le vecteur

$$(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \alpha m_1 \\ \beta m_2 \\ \gamma m_3 \end{pmatrix}$$

est orthogonal simultanément à

$$\left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{m}\right)(j\mathbf{k}_2 - j\mathbf{k}_3).$$

En conclusion :

Sous l'influence d'une induction magnétique continue $\boldsymbol{B}$, les porteurs de charge électrique q, de masse apparente matricielle $\left(\frac{1}{m}\right)$, se déplacent sur des hélices elliptiques entre deux collisions.

L'axe des hélices est parallèle à $\boldsymbol{B}$; la composante de rotation s'effectue sur une ellipse située en général dans un plan non perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$, sauf dans le cas où $\frac{1}{m}$ est scalaire, l'hélice devenant alors circulaire.

— Si ω_c désigne la pulsation suivant laquelle s'effectue le mouvement de rotation.

— Si le système d'axes de référence orthogonaux choisi est tel que $\left(\frac{1}{m}\right)$ soit diagonal avec

$$\left(\frac{1}{m}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{bmatrix}.$$

— Si B, α, β, γ représentent respectivement le module et les consinus directeurs (relatifs au système d'axes précédent) de $\boldsymbol{B}$, alors

$$\omega_c = qB\left[\frac{\alpha^2 m_1 + \beta^2 m_2 + \gamma^2 m_3}{m_1 m_2 m_3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

et le mouvement de rotation s'effectue dans un plan perpendiculaire aux vecteurs de composantes αm_1, βm_2, γm_3.

ANNEXE II.

Cette annexe a pour but de démontrer le résultat suivant :

Si une matrice ε est hermitique, il existe au moins une matrice S, unitaire à coefficients réels, telle que

$$S^{-1}\varepsilon S$$

ait les deux premiers éléments de la diagonale principale égaux.

Soit

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon'_1 & \varepsilon''_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon'_2 & \varepsilon''_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon'_3 & \varepsilon''_3 \end{pmatrix},$$

la matrice hermitique et donc celle pour laquelle $\varepsilon'_1 =$ imaginaire conjugué de ε_2. Soit alors la matrice

$$(S) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

alors

$$S^{-1}\varepsilon S = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(\varepsilon)\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1\cos\psi + \varepsilon'_1\sin\psi & -\varepsilon_1\sin\psi + \varepsilon'_1\cos\psi & \varepsilon''_1 \\ \varepsilon_2\cos\psi + \varepsilon'_2\sin\psi & -\varepsilon_2\sin\psi + \varepsilon'_2\cos\psi & \varepsilon''_2 \\ \varepsilon_3\cos\psi + \varepsilon'_3\sin\psi & -\varepsilon_3\sin\psi + \varepsilon'_3\cos\psi & \varepsilon''_3 \end{pmatrix}.$$

D'où le terme 1re ligne, 1re colonne de la matrice finale

$$\varepsilon_1 \cos^2\psi + \varepsilon'_1 \sin\psi\cos\psi + \varepsilon_2 \sin\psi\cos\psi + \varepsilon'_2 \sin^2\psi = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon'_2}{2} + \left| \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon'_2}{2} \cos 2\psi + \frac{\varepsilon'_2 + \varepsilon_2}{2} \sin 2\psi \right|$$

et le terme 2e ligne, 2e colonne :

$$\varepsilon_1 \sin^2\psi - \varepsilon'_1 \sin\psi\cos\psi - \varepsilon_2 \sin\psi\cos\psi + \varepsilon'_2 \cos^2\psi = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon'_2}{2} - \left| \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon'_2}{2} \cos 2\psi + \frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon_2}{2} \cos 2\psi \right|.$$

Les deux premiers termes de la diagonale principale sont donc égaux si

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon'_2}{2} \cos 2\psi + \frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon_2}{2} \sin 2\psi = 0,$$

équation définissant un angle réel en raison de l'hermiticité de (ε), d'où le résultat annoncé.

ANNEXE III.

Cette annexe a pour but de résoudre le problème suivant :

Étant donné un générateur d'impédance interne R_g, alimenter à l'aide de ce générateur un dispositif à n sorties identiques, destinées à être chargées par une charge R, de façon que :

1° *le générateur soit adapté si toutes les sorties sont chargées par R;*

2° *chaque sortie soit équivalente à un générateur d'impédance interne R si toutes les autres sorties sont chargées par R.*

La solution proposée utilise pour chaque sortie un atténuateur simple constitué des résistances R_1 et R_2.

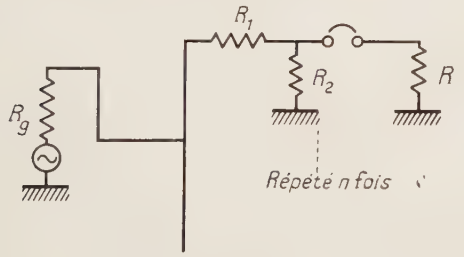


Fig. A. 2.

Le problème peut alors se ramener au seul examen des impédances d'entrée et de sortie d'une seule cellule convenablement chargée et excitée. En effet soit R_e la résistance d'entrée d'une seule cellule chargée par R; R_e est une donnée du problème puisque $\frac{1}{n} R_e = R_g$, le générateur supposé connu devant être adapté lorsque toutes les sorties sont chargées par R. Soit en outre Z l'impédance du générateur équivalent à l'ensemble « générateur + les $(n-1)$ autres sorties chargées par R »; donc Z est connu et

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_g} + \frac{n-1}{R_e}.$$

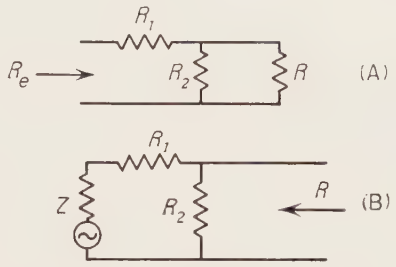


Fig. A. 3.

Il suffit donc de traduire que R_e et Z ont bien la valeur désirée pour en déduire R_1 et R_2, soit

$$R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R} = R_e,$$

$$\frac{[R_1 + Z]\, R_2}{R_1 + R_2 + Z} = R.$$

En éliminant R_1 entre ces deux équations, il vient

$$R_2^2 [R_e + Z - 2R] = R^2 [R_e + Z],$$

ce qui limite la validité de la solution aux cas où $R_e + Z > 2R$. Supposant cette condition remplie, la solution est alors

$$R_2 = R \sqrt{\frac{R_e + Z}{R_e + Z - 2R}},$$

$$R_1 = R_e - \frac{R_2 R}{R_2 + R}.$$

Dans le cas particulier où $R = R_g$, il vient

$$R_e = n R_g,$$

$$Z = \frac{n}{2n-1} R_g,$$

soit

$$R_2 = \frac{n}{n-1} R_g,$$

$$R_1 = 2n \frac{n-1}{2n-1} R_g,$$

soit

$$R_2 \neq 67\,\Omega$$

$$R_1 \neq 172\,\Omega$$

Pour $n = 4$ et pour $R_g = 50\,\Omega$.

L'atténuation apportée par le système entre la puissance utilisable de chaque sortie et la puissance utilisable du générateur se détermine à l'aide du schéma équivalent de la figure A.4 équivalent lui-même à celui de la figure A.5 et donc finalement à celui de la figure A.6.

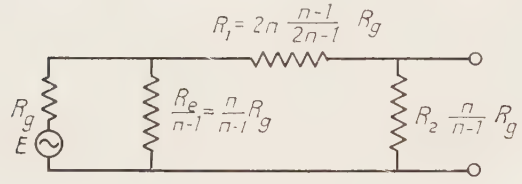


Fig. A.4.

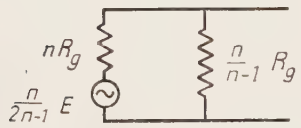


Fig. A.5.

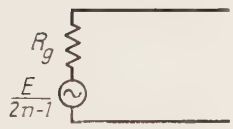


Fig. A.6.

L'atténuation cherchée a donc pour valeur

$$\frac{1}{4R_g}\left[\frac{E}{2n-1}\right]^2 \frac{4R_g}{E^2} = \left[\frac{1}{2n-1}\right]^2,$$

soit exprimé en décibels :

$$20\log_{10}(2n-1),$$

ce qui pour $n = 4$ donne 16,9 dB.

ANNEXE IV.

Cette annexe a pour but d'étudier les courbes

$$\text{(A.1)}\qquad \left\{ \frac{P_t}{P_i} = \left\{ \left[\frac{1 + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}} \right]^2 \sin^2(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}\,d) + \cos^2(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}\,d) \right\}^{-1} \right.$$

(variable : ε_c),

$$\text{(A.2)}\qquad \left\{ \frac{P_t}{P_i} = \left\{ \left[\frac{1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}} \right]^2 \operatorname{sh}^2(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}\,d) + \operatorname{ch}^2(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}\,d) \right\}^{-1} \right.$$

(variable : ε').

(A.2) correspondant à (A.1) dans le cas où ε_c est < 0 avec $\varepsilon_c = -\varepsilon'$.

Courbe (A.1). — Pour simplifier les notations, on pose

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \qquad (x > 0),$$

$$a = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\,d.$$

alors

$$\frac{P_t}{P_i} = \left[\frac{(1+x^2)^2}{4x}\sin^2\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) + \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right]^{-1};$$

— fonction définie quel que soit x, sauf pour $x = 0$;

— pour $x \to \infty$:

$$\frac{P_t}{P_i} \to \left[\frac{x}{4}\frac{a^2}{x} + 1\right]^{-1} = \left[1 + \frac{a^2}{4}\right]^{-1};$$

— la dérivée a pour expression

$$\frac{x-1}{4x^2}\sin\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\left[\frac{a}{\sqrt{x}}(x-1)\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) - (x+1)\sin\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right]\left(\frac{P_t}{P_i}\right)^2,$$

elle s'annule donc pour

$$x = 1,$$

$$\sin\frac{a}{\sqrt{x}} = 0,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) = \frac{x-1}{x+1}\,\frac{a}{\sqrt{x}}.$$

1°

$$\sin\frac{a}{\sqrt{x}} = 0 \;\Rightarrow\; \sin\left[\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}\,d\right] = 0 \;\Rightarrow\; \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}\,d = p\pi \;\Rightarrow\; d = p\frac{1}{2f\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}}$$

$$d = p\frac{\lambda_m}{2} \qquad \text{(longueur d'onde dans le milieu)},$$

comme par ailleurs,

$$\sin\frac{a}{\sqrt{x}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{P_t}{P_i} = 1 \qquad (x \neq \infty),$$

on retrouve la condition de transfert maximal de puissance à chaque fois que l'épaisseur de l'échan-

tillon vaut un nombre entier de demi-longueurs d'onde dans le milieu.

L'annulation de sin $\frac{a}{\sqrt{x}}$ traduit les maximums de $\frac{P_t}{P_i}$ (sauf cas particulier : $x \to \infty$).

2° $x = 1$ soit $\varepsilon_r = \varepsilon$: Alors $\frac{P_t}{P_i} = 1$ et il s'agit d'un nouveau maximum. La raison en est évidente : si la constante diélectrique de l'obstacle est égale à la constante diélectrique du milieu environnant, il n'y a en fait plus d'obstacle.

3°

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{\sqrt{x}}}{\frac{a}{\sqrt{x}}} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Cette équation est à résoudre graphiquement en prenant comme variable auxiliaire

$$u = \frac{a}{\sqrt{x}},$$

ce qui conduit à résoudre

$$\frac{\operatorname{tg} u}{u} = \frac{a^2 - u^2}{a^2 + u^2}.$$

Ces deux courbes dont l'allure est immédiate à déterminer (l'ordre de grandeur de a nécessaire pour la courbe $\frac{a^2-u^2}{a^2+u^2}$ est $2{,}7.10^{-3}$ à 30 MHz et 9.10^{-2} à 1000 MHz) sont représentées sur la figure A.7.

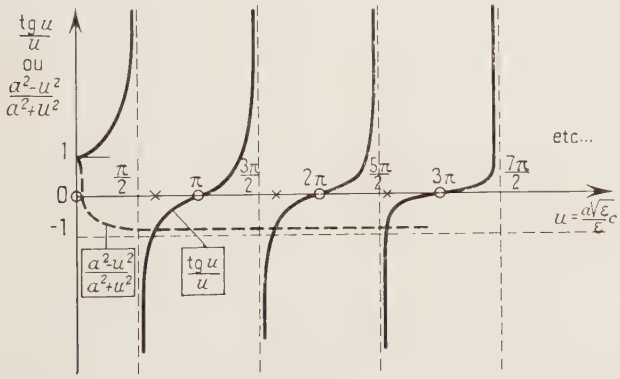


Fig. A.7.

Cette résolution graphique montre qu'il y a une infinité de solutions et que celles-ci alternent avec les solutions de

$$\sin\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) = 0.$$

[Ce fait est souligné sur la figure A.7 où les zéros de sin $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)$ sont indiqués par un rond sur l'axe des abscisses et les zéros de $\frac{\operatorname{tg} u}{u} = \frac{a^2 - u^2}{a^2 + u^2}$ sont indiqués par une croix.]

Les zéros ainsi obtenus reflètent autant de minimums de la courbe $\frac{P_t}{P_i}$.

Le lieu de ces minimums est obtenu en reportant la valeur de tg u tirée de

$$\frac{\operatorname{tg} u}{u} = \frac{a^2 - u^2}{a^2 + u^2}$$

dans l'expression de $\frac{P_t}{P_i}$; il s'agit d'une courbe d'équation

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{1 + \frac{a^2}{x}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}{1 + a^2\frac{(x-1)^2}{4x^2}}.$$

L'étude de ce lieu est assez rapide :

— l'équation est définie quel que soit $x \geqq 0$;

— pour $x = 0$ la courbe passe par zéro;

— pour $x \to \infty$ la courbe tend vers l'asymptote horizontale $\left[1 + \frac{a^2}{4}\right]^{-1}$;

— la dérivée a pour expression

$$-\frac{a^2}{4}\,\frac{(x-1)^3}{x^4(x+1)^3}\,\frac{2x(3x+1) + a^2(x-1)^2}{\left[1 + a^2\frac{(x-1)^2}{4x^2}\right]^2}$$

et se trouve donc du signe de $-(x-1)^3$, ayant comme valeur 4 pour $x = 0$ et 0 pour $x \to \infty$.

Tout ceci suffit pour tracer la courbe cherchée (*fig.* A.9), partie > 0 de l'axe des abscisses. Il n'y a pas lieu de chercher à préciser ce qui se passe pour $x = 0$ où le rapport $\frac{P_t}{P_i}$ est indéterminé, car dans cette zone, l'approximation des pertes nulles n'est plus valable.

Courbe B. — Toujours pour simplifier les notations, on pose

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \qquad x = 0,$$

$$a = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon}\, d,$$

alors

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{1}{\frac{(1-x)^2}{4x}\operatorname{sh}^2\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) + \operatorname{ch}^2\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)}.$$

La courbe correspondante est moins compliquée que la précédente :

— l'expression est définie quel que soit x;

— pour $x = 0$:

$$\frac{P_l}{P_i} \to 16x\, e^{-\frac{2a}{\sqrt{x}}} \to 0;$$

— pour $x \to \infty$:

$$\frac{P_l}{P_i} \to \left[\frac{x}{4}\frac{a^2}{x} + 1\right]^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{4}};$$

— la dérivée a pour expression

$$\frac{x+1}{4x^2}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{\sqrt{x}}\left[(x+1)\frac{a}{\sqrt{x}}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{\sqrt{x}} - (x-1)\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{\sqrt{x}}\right]\left(\frac{P_l}{P_i}\right)^2,$$

elle s'annule pour $x = 0$:

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{P_l}{P_i} = 16\,e^{-\frac{2a}{\sqrt{x}}} \to 0\right),$$

elle s'annule pour $x \to \infty$, car elle se comporte comme

$$\frac{1}{4x}\frac{a}{\sqrt{x}}\left[a\sqrt{x} - a\sqrt{x}\right]\left[1 + \frac{a^2}{4}\right]^2,$$

ce sont d'ailleurs ses seules possibilités d'annulation car l'expression

$$[x+1]\frac{a}{\sqrt{x}}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{\sqrt{x}} - (x-1)\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{\sqrt{x}}$$

implique pour s'annuler l'égalité

$$\frac{\mathrm{th}\,\frac{a}{\sqrt{x}}}{\frac{a}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1},$$

ce qui est impossible comme il est aisé de le voir en résolvant graphiquement (*fig.* A.8).

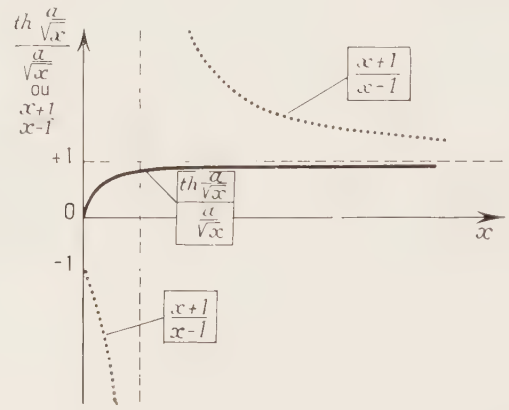


Fig. A.8.

Le tracé de la courbe B correspond (*fig.* A.9) à la partie < 0 des abscisses.

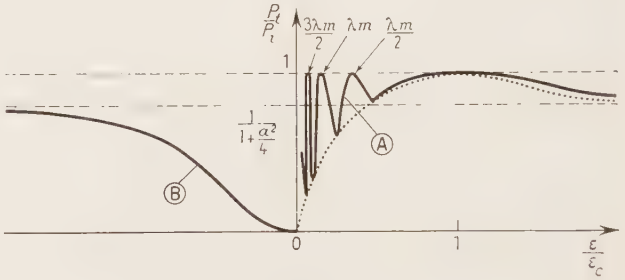


Fig. A.9.

Rappelons que pratiquement en raison de la valeur très faible de $\omega^2 \mu_0 \varepsilon$ dans l'air, les deux asymptotes horizontales sont pratiquement confondues.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. Aigrain, *Proc. Internat. Conf. Semi-conductor Physics*, Prague, 1960, Czechoslovakian Academy of Sciences, Prague, 1961.

[2] R. Bowers, C. Legendy et F. Rose, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 7, nº 9, november 1961, p. 739.

[3] R. G. Chambers et B. K. Jones, *Proc. Roy. Soc.*, vol. 270, 1962, p. 417.

[4] A. Libchaber et R. Veilex, *Phys. Rev.*, 127, 1962, p. 774.

[5] Hilsum et A. C. Rose-Innes, *Semi-conducting III-V compounds. International Series of Monographs on Semi-conductors*, vol. 1, Pergamon Press.

[6] D. K. Stevens et J. M. Crawford, *Phys. Rev.*, vol. 99, 1955, p. 487.

[7] Cotti, Wyder et Quattropani, *Phys. Lett.*, vol. 1, 1962, p. 50.

[8] Bitter, *Rev. Sc. Instr.*, décembre 1936.

[9] A. Libchaber et R. Veilex, *Proc. Internat. Conf. Physics of Semi-conductors*, Exeter, juillet 1962, p. 138.

PROPAGATION DES ONDES MÉTRIQUES ET DÉCAMÉTRIQUES DANS LES SEMI-CONDUCTEURS EN PRÉSENCE D'UNE INDUCTION MAGNÉTIQUE CONTINUE, EFFET « HÉLICON » (1)

Par J. GRÉMILLET,

Département de Recherches Physico-Chimiques
de la CSF–Compagnie générale de télégraphie Sans Fil.

DEUXIÈME PARTIE (2).

Sommaire. — *Ce texte constitue la suite d'un article paru dans le numéro précédent des* Annales de Radioélectricité, *concernant la propagation des ondes électromagnétiques dans les semi-conducteurs en présence d'une induction magnétique continue. Le premier article montrait que le matériau se comporte comme un diélectrique, de constante diélectrique apparente scalaire et dépendant du sens de la polarisation pour deux ondes planes polarisées elliptiquement et fournit une vérification expérimentale qualitative entre* 30 *et* 1000 MHz.

Le but de cette seconde partie est de fournir dans la même gamme de fréquences une vérification expérimentale quantitative de manière à effectuer une confrontation simple avec la théorie. Cette vérification effectuée, un exemple d'application du phénomène est fourni sous la forme d'un isolateur fonctionnant à 30 MHz (C. D. U. : 539.2 : 537.11.)

Summary. — *This is the continuation of an article which appeared in the preceding issue of the* Annales de Radioélectricité, *concerning the propagation of electromagnetic waves in semi-conductors in the presence of a direct current magnetic field. The first article showed that the material behaves as a dielectric, its dielectric constant being scalar and depending on the direction on polarization for two plane waves elliptically polarized, and supplies an experimental qualitative verification between* 30 *and* 1000 Mc/s.

The object of Part II is to provide, in the same frequency band, an experimental quantitative verification so as to obtain a simple comparison with theory. This verification having been effected, an example of application of the effect is given in the form of an isolator operating at 30 Mc/s. (U. D. C. : 539.2 : 537.11.)

Inhaltsangabe. — *Dieser Beitrag ist die Fortsetzung des Aufsatzes über die Fortpflanzung der elektromagnetischen Wellen in Halbleitern in Anwesenheit eines magnetischen Gleichfeldes, welcher im vorigen Heft der* Annales de Radioélectricité *veröffentlicht wurde. Der erste Aufsatz zeigt, dass der Werkstoff sich wie ein Dielektrikum verhält, und zwar mit einer scheinbaren skalaren dielektrischen Konstanten, deren Wert für zwei ebene, elliptisch polarisierte Wellen von der Polarisationsrichtung abhängt. Dieses Ergebnis wird qualitativ durch Versuche zwischen* 30 *und* 1000 MHz *bestätigt.*

Dieser zweite Teil bezweckt die experimentelle quantitative Nachprüfung im selben Frequenzbereich, um eine einfache Gegenüberstellung der Theorie und der Versuchsresultate zu ermöglichen. Nach dieser Gegenüberstellung wird ein Anwendungsbeispiel dieses Vorganges gegeben, in Form eines « Isolators » für eine Betriebsfrequenz von 30 MHz.

(D. K. : 539.2 : 537.11.)

(1) Manuscrit reçu le 10 février 1964.

(2) La première partie a été publiée dans le n° 76 (avril 1964) des *Annales de Radioélectricité.*

INTRODUCTION.

Dans la première partie il a été montré qu'en présence d'une induction magnétique continue, un semi-conducteur pouvait (à condition que le temps de relaxation des porteurs de charge électrique soit assez grand), se comporter comme un diélectrique dont la constante diélectrique est scalaire et dépend du sens de polarisation d'une onde électromagnétique plane incidente. Une première vérification expérimentale a alors été exposée. Cette seconde partie décrit une deuxième vérification expérimentale permettant la comparaison quantitative entre théorie et expérience et examine les possibilités d'application pratique du phénomène qui a reçu le nom d'effet « Hélicon » ([3]).

3. VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE QUANTITATIVE.

3.1. Principe de l'expérimentation envisagée.

Un gros inconvénient des mesures décrites dans le précédent article réside dans le très bas niveau auquel sont faites les mesures de puissance. Lorsqu'il faut travailler à un niveau 10^{13} fois inférieur à celui du générateur utilisé, un grand nombre de précautions (telles que mise à la masse soigneuse de tous les éléments, double blindage sur les coaxiaux, tous les contacts soudés ou doublés avec de la laque d'argent) doivent être prises.

Or on a montré au paragraphe 2.5 que l'atténuation subie est en majeure partie le fait de la désadaptation entre milieux et que l'impédance « générateur » est beaucoup plus grande que l'impédance « InSb ». Pour augmenter le niveau, il faut adapter ces impédances et aux fréquences relativement basses utilisées, le moyen le plus simple reste encore le transformateur.

Convenablement utilisé, le transformateur élimine en outre le problème des fuites autour de InSb, en plaçant primaire et secondaire à angle droit (*fig.* 24).

En absence d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$, il n'y a en principe pas de couplage entre primaire et secondaire et il n'y a donc pas de fuites de l'entrée sur la sortie. Lorsque $\boldsymbol{B}$ est différent de zéro apparaît l'effet « Hélicon » et seule la composante polarisée circulairement dans le bon sens (résultats de la décomposition de la polarisation rectiligne d'excitation) pénètre dans InSb. Il existe alors un champ tournant dans InSb et par conséquent un signal induit sur la sortie.

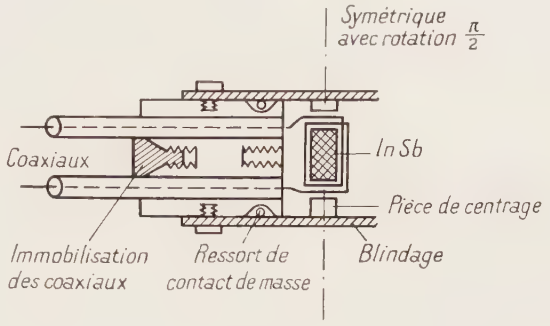


Fig. 24.

3.2. Mise en œuvre expérimentale.

La mesure envisagée repose sur le postulat du faible niveau de fuites entre primaire et secondaire. Or, pour les fréquences de travail envisagées, les couplages capacitifs entre enroulements sont inévitables et très importants. Puisqu'ils ne peuvent être éliminés, il faut qu'ils se compensent mutuellement, d'où l'utilisation d'un montage symétrique. En outre, pour éviter les possibilités de résonance des enroulements avec les capacités parasites, primaire et secondaire sont limités à une spire et demie de clinquant large d'environ 1 mm.

Le montage se réalise aisément à partir des éléments de l'expérimentation précédente et se trouve représenté schématiquement sur la figure 25.

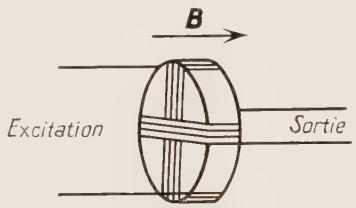
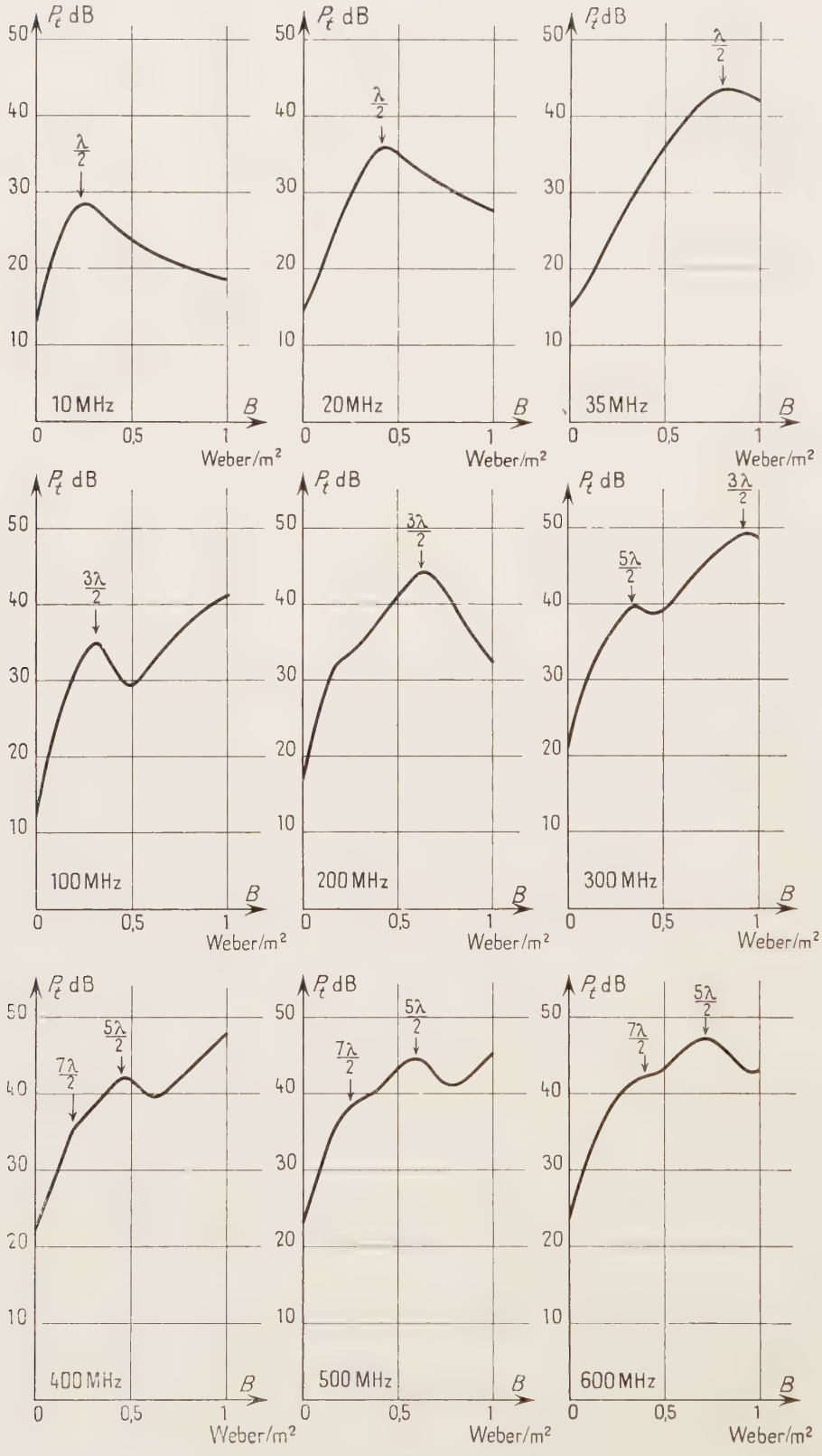


Fig. 25.

3.3. Résultats expérimentaux et leur interprétation.

Les résultats expérimentaux sont représentés sur la figure 26. Les courbes représentent la puissance de sortie sur chaque coaxial de sortie, les deux sorties étant identiques à quelques dixièmes de décibel près. Chaque courbe n'est tracée que

([3]) P. Aigrain, *Proceedings of the international Conferences on Semi-Conductor Physics.*, Prague, 1960; Czechoslovakian Academy of Sciences, Prague, 1961.


P_t dB
50
40
30
20
10
$\frac{\lambda}{2}$
10 MHz
B
0
0,5
1
Weber/m²
P_t dB
$\frac{\lambda}{2}$
20 MHz
B
Weber/m²
P_t dB
$\frac{\lambda}{2}$
35 MHz
B
Weber/m²
P_t dB
$\frac{3\lambda}{2}$
100 MHz
B
Weber/m²
P_t dB
$\frac{3\lambda}{2}$
200 MHz
B
Weber/m²
P_t dB
$\frac{3\lambda}{2}$
$\frac{5\lambda}{2}$
300 MHz
B
Weber/m²
P_t dB
$\frac{5\lambda}{2}$
$\frac{7\lambda}{2}$
400 MHz
B
Weber/m²
P_t dB
$\frac{5\lambda}{2}$
$\frac{7\lambda}{2}$
500 MHz
B
Weber/m²
P_t dB
$\frac{5\lambda}{2}$
$\frac{7\lambda}{2}$
600 MHz
B
Weber/m²

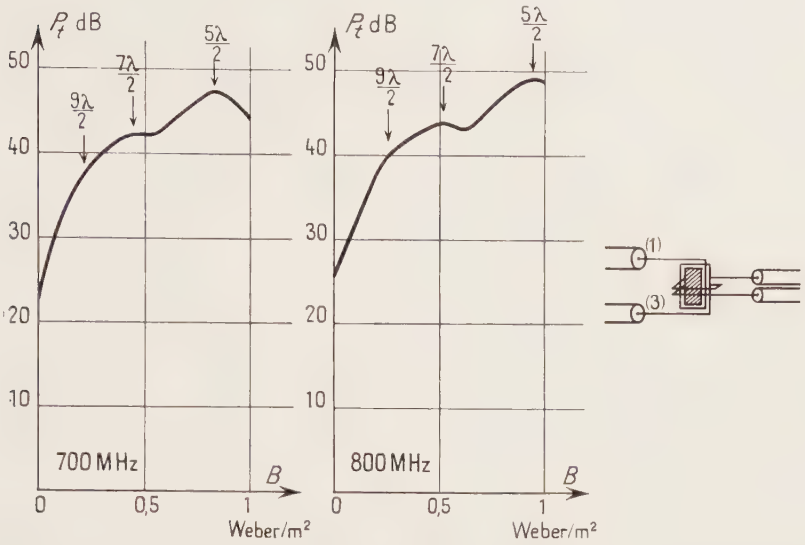


Fig. 26. — Essai avec transformateur d'adaptation à une spire et demie. (1) et (3) sont excitées en amplitudes égales en opposition de phase. La puissance utilisable d'excitation est 1 mW par ligne, correspondant au niveau arbitraire 70 dB. Les courbes sont relatives à la puissance par ligne de sortie. Expérimentalement la puissance de sortie suit la même loi de variation sur les deux lignes de sortie.

pour $B > 0$; en effet, l'excitation étant à polarisation rectiligne, il doit y avoir (et il y a effectivement expérimentalement) symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarquons tout de suite que la transmission de puissance est bien meilleure dans cette expérience que dans les précédentes. A $B = 1\,\mathrm{Wb/m^2}$, la perte de transmission est de 20 à 30 dB (selon qu'on se trouve loin ou près d'une résonance dimensionnelle pour cette valeur de B), contre 65 à 70 dB dans les résultats équivalents de la figure 15.

Mais en outre les nouveaux résultats s'écartent beaucoup en ce qui concerne les résonances dimensionnelles. Sur la figure 26, les maximums sont nettement mieux marqués que sur la figure 15; ils sont encore visibles à $f = 800$ MHz, alors qu'auparavant ils n'étaient plus discernables déjà à 550 MHz. Par contre certains des maximums visibles auparavant ont disparu des nouvelles courbes. Par exemple à 100 MHz, la résonance $3\frac{\lambda_m}{2}$ est mieux accusée, mais celle en λ_m a disparu. L'explication de l'allure des courbes obtenues est d'ailleurs là : dans les résonances en

$$p\frac{\lambda_m}{2},$$

les valeurs paires de p ont disparu, dégageant du même coup les résonances impaires. La raison en réside dans le montage expérimental lui-même. La figure 27 montre l'évolution dans le temps du champ magnétique se propageant dans InSb, abstraction faite du mouvement de rotation autour de la direction de propagation, pour une résonance dimensionnelle $\frac{\lambda}{2}$ et λ.

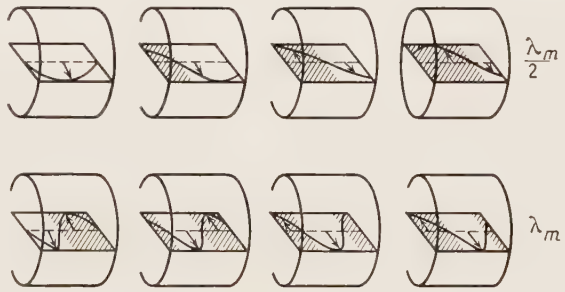


Fig. 27.

A un moment donné quelconque, il est possible de distribuer l'espace en zones où les flux des champs magnétiques sont de sens contraire. Pour $\frac{\lambda_m}{2}$, le flux instantané n'est nul qu'à des valeurs discrètes de t; pour λ_m il est nul à tout instant; il n'y a, en résultante, aucune induction dans le secondaire lors des résonances en λ_m. Cette meilleure acuité des résonances permet la première vérification quantitative de l'effet « Hélicon ». Conformément aux résultats du paragraphe 2.5, les résonances

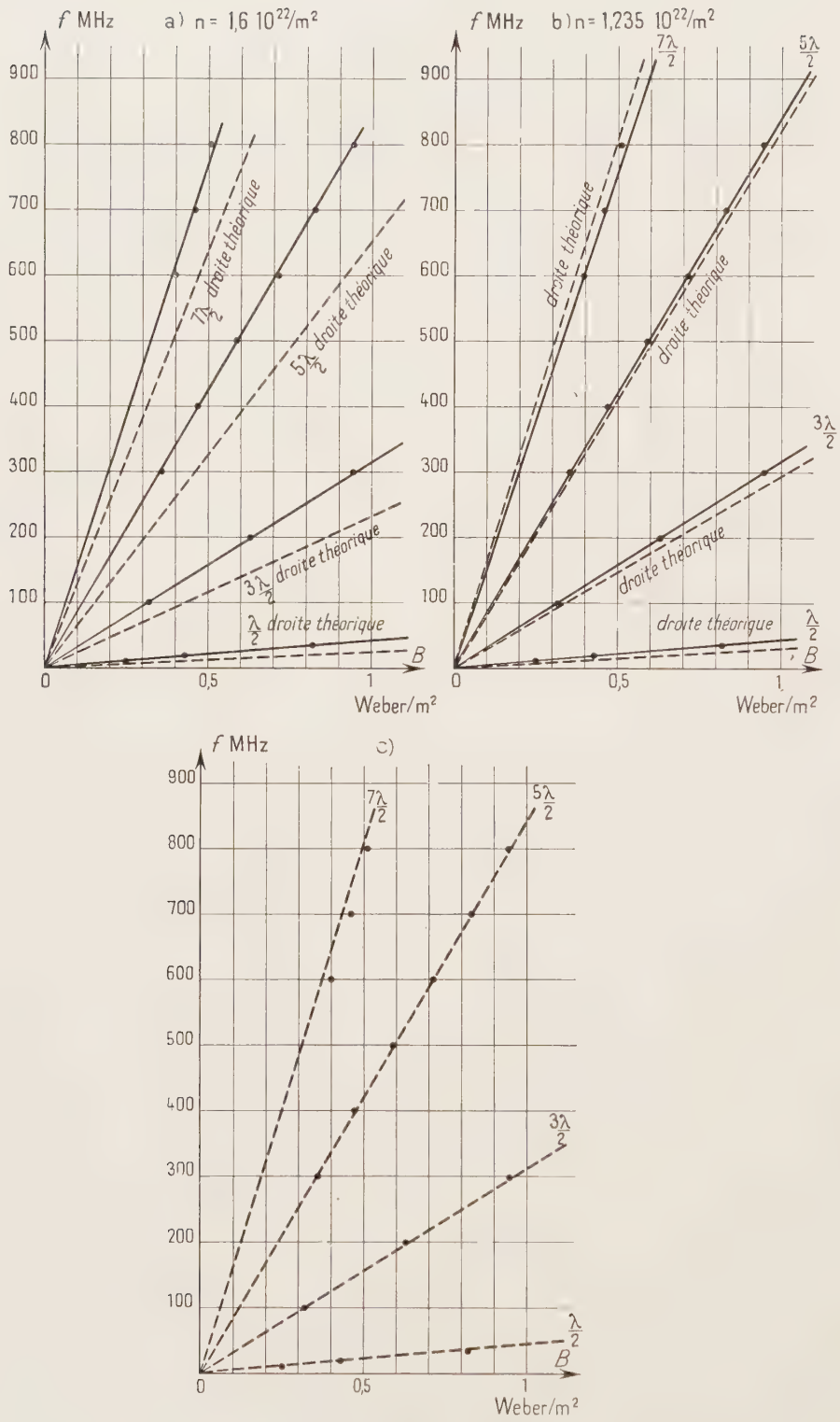

f MHz
a) n = 1,6 10²²/m²
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0,5
1
Weber/m²
B
7λ/2 droite théorique
5λ/2 droite théorique
3λ/2 droite théorique
λ/2 droite théorique
f MHz
b) n = 1,235 10²²/m²
droite théorique
droite théorique
droite théorique
droite théorique
droite théorique
7λ/2
5λ/2
3λ/2
λ/2
B
Weber/m²
f MHz
c)
7λ/2
5λ/2
3λ/2
λ/2
B
Weber/m²

Fig. 28.

dimensionnelles pour les nombres impairs de demi-longueurs d'onde sont données par

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_e}\,d=(2q+1)\pi \qquad (q \text{ entier} \geq 0).$$

Remplaçant ε_e par sa valeur « Hélicon »,

$$\varepsilon_e=\frac{ne}{B\omega},$$

on a

$$\omega\sqrt{\mu_0\frac{ne}{B\omega}}\,d=(2q+1)\pi,$$

soit

$$\mu_0\frac{ne\,d^2}{B\omega}\omega_2=(2q+1)^2\pi^2,$$

$$f=\left[\frac{\pi}{2}\frac{1}{ne\mu_0 d^2}\right](2q+1)^2 B.$$

Pour un rang de résonance donné, la fréquence à laquelle la résonance est obtenue est fonction linéaire de B.

Les résultats de l'expérimentation peuvent facilement être comparés à cette expression théorique. Tirées de la figure 26 retracée à une échelle convenable pour une bonne appréciation des maximums, les valeurs de f en fonction de B sont reportées sur la figure 28 *a*. Il est évident que les points expérimentaux s'alignent sur des droites passant par l'origine; mais par contre, lorsque les droites théoriques correspondant à la « température ambiante » ($n = 1{,}6.10^{22}/\mathrm{m}^3$) sont superposées, la coïncidence n'est pas obtenue. La pente expérimentale est plus importante, et en considérant l'expression théorique, ceci correspond à une diminution du nombre de porteurs n. Sachant que ce dernier varie sensiblement exponentiellement avec la température, il fallait donc contrôler ce que voulait dire « température ambiante ». Or InSb est naturellement au centre de l'électroaimant refroidi par courant d'eau; en fait les conditions atmosphériques du temps de l'expérimentation étaient telles que l'eau était extrêmement froide. Après mesure faite de la température à l'endroit de InSb, il a été trouvé une température de 6,5°C.

A partir de la nouvelle valeur de n correspondant à cette température (1), une nouvelle comparaison entre théorie et expérience est faite sur la figure 28 *b*. L'accord est apparemment devenu bon; mais ce n'est qu'une apparence, au moins en ce qui concerne les droites $\frac{\lambda_m}{2}$; comparons en effet numériquement les pentes des droites expérimentales et théoriques.

Résonance.	Pente (MHz/Wb/m²). Droite expérimentale.	Droite théorique.	Écart relatif (%).
$\frac{\lambda_m}{2}$	44	33	+33
$3\frac{\lambda_m}{2}$	315	297	+ 6,2
$5\frac{\lambda_m}{2}$	835	825	+ 1,2
$7\frac{\lambda_m}{2}$	1520	1615	— 6

Les écarts de quelques pour-cent sont facilement explicables : la précision sur B est d'environ $\pm$ 3 %; n varie rapidement avec la température et au voisinage de 6,5°C :

$$\frac{\Delta n}{n}=2{,}7\ \%/^{\circ}\mathrm{C}.$$

Enfin la pente expérimentale est déterminée graphiquement et la précision sur le tracé est aussi de l'ordre de quelques pour-cent. Par contre, une erreur de 33 % nécessite une explication autre que celle de la précision des déterminations. L'expérimentation ayant en principe raison, il faut revoir la théorie. Or l'expression théorique est relative à une onde plane traversant sans réfraction une lame de diélectrique; ceci est vrai dans le cas d'une lame de diélectrique infinie transversalement et reste approximativement vrai si les dimensions transversales sont grandes devant la longueur d'onde dans le diélectrique pour une lame d'épaisseur donnée. Autrement, il faut tenir compte des conditions aux limites. Or pour l'extérieur, InSb est quasi métallique et en première approximation, le champ électrique à la surface extérieure de InSb est normal à cette surface. Les conditions de raccordement à travers cette surface impliquent qu'il en est de même à l'intérieur et par conséquent l'énergie se propage dans InSb comme dans un guide cylindrique rempli d'un diélectrique ayant la constante diélectrique apparente « Hélicon ». Les résonances dimensionnelles doivent alors avoir lieu en

$$p\frac{\lambda_G}{2},$$

où λ_G désigne la longueur d'onde apparente dans le guide pour le mode propre excité. Si R est le

(1) C. Hilsum et A. C. Rose-Innes, *Semi-conducting III-V Compounds*, p. 125.

rayon du guide circulaire, la fréquence de coupure d'un mode propre est telle que

$$\omega_c \sqrt{\mu_0 \varepsilon_r} R = \xi,$$

avec ω_c, pulsation de coupure; ξ, nombre caractéristique du mode propre envisagé, donné par l'équation aux valeurs propres du système.

Il est connu par ailleurs que la longueur d'onde dans le guide est liée à la longueur d'onde λ_m dans le milieu supposé indéfini et à la longueur d'onde de coupure λ_c par

$$\lambda_G = \frac{\lambda_m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_c}\right)^2}},$$

Si, dans l'expérience précédente, l'énergie est transportée par un mode propre du guide circulaire, les résonances dimensionnelles sont alors telles que

$$d = (2q+1)\frac{\lambda_G}{2} = (2q+1)\frac{\frac{\lambda_m}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_c}\right)^2}},$$

soit encore

$$\left[1 - \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_c}\right)^2\right] d^2 = (2q+1)^2 \left(\frac{\lambda_m}{2}\right)^2.$$

Pour obtenir la relation liant f et B pour les résonances dimensionnelles d'un mode propre donné, il faut exprimer λ_m, λ_c en fonction de f et B,

$$\lambda_c = \frac{1}{f_c \sqrt{\mu_0 \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{\mu_0 \varepsilon_r}} = \frac{2\pi R}{\xi},$$

$$\lambda_m = \frac{1}{f\sqrt{\mu_0 \varepsilon_c}} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu_0 \frac{ne}{B\omega}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_0 \frac{ne\omega}{B}}} \quad (^*).$$

La condition de résonance dimensionnelle peut encore s'écrire :

$$\left[\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_m}\right)^2 - 1\right] d^2 = (2q+1)^2 \left(\frac{\lambda_c}{2}\right)^2,$$

soit

$$\mu_0 ne \left(\frac{R}{\xi}\right)^2 \frac{\omega}{B} d^2 = (2q+1)^2 \pi^2 \left(\frac{R}{\xi}\right)^2 + d^2.$$

soit

$$\frac{\omega}{B} = \frac{1}{\mu_0 ne} \left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \frac{1}{d^2} \left[(2q+1)^2 \pi^2 \left(\frac{R}{\xi}\right)^2 + d^2\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{\mu_0 ne\, d^2} \left[(2q+1)^2 + \left(\frac{\xi}{\pi}\frac{d}{R}\right)^2\right],$$

soit finalement

$$f = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\mu_0 ne\, d^2} \left[(2q+1)^2 + \left(\frac{\xi}{\pi}\frac{d}{R}\right)^2\right] B.$$

La relation entre f et B est toujours linéaire; mais en comparant avec l'expression précédente :

$$f = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\mu_0 ne\, d^2} (2q+1)^2 B,$$

il est visible qu'il apparaît dans la pente un terme complémentaire, fonction des dimensions et d'autant plus petit que $\frac{d}{R}$ l'est, c'est-à-dire que les dimensions transversales sont grandes devant l'épaisseur et d'autant plus négligeable que le rang de la résonance dimensionnelle est élevé.

En se basant sur les résultats expérimentaux, la valeur de ξ fournissant l'accord au mieux entre expérience et théorie peut être déduite.

Prenons brutalement la valeur qui fait coïncider courbes théoriques et expérimentales pour la résonance $\frac{\lambda}{2}$.

Cette valeur est

$$\xi = 2{,}65.$$

Les valeurs des pentes obtenues sont alors :

Résonance.	Pente (MHz/Wb/m²) expérimentale.	théorique.	Écart relatif (%).
$\frac{\lambda}{2}$	11	44	+0
$3\frac{\lambda}{2}$	315	308	+2,3
$5\frac{\lambda}{2}$	835	836	0
$7\frac{\lambda}{2}$	1520	1627	−6,6

Il ne faut bien entendu pas se leurrer sur l'apparente précision obtenue; ce qui compte, néanmoins, c'est la justesse de la correction qui amène simultanément trois courbes à coïncider; la droite correspondant à la résonance dimensionnelle $7\frac{\lambda}{2}$ est d'ailleurs là pour rappeler l'existence d'inévitables

(*) Cette écriture suppose que la constante diélectrique apparente du matériau remplissant le guide est $\frac{ne}{B\omega}$. En fait, cette égalité n'a été démontrée que pour les ondes dont le plan de polarisation est perpendiculaire à **B**. Dans le guide d'onde, ceci n'est plus vrai; il s'agit donc ici d'une deuxième approximation des phénomènes, simplement meilleure que la première supposant le milieu indéfini.

erreurs; il est par ailleurs normal que la coïncidence soit plus mauvaise pour $7\frac{\lambda}{2}$ car :

— les points expérimentaux correspondent aux fréquences élevées;

— les résonances se suivent de très près et sont moins bien détachées les unes des autres (cf. *fig.* 32);

— les résonances sont obtenues pour des valeurs de B faibles et par conséquent un produit μB défavorable.

Les droites théoriques corrigées suivant la valeur précédente de $\frac{\xi}{\xi_0}$ sont tracées sur la figure 15 *c*.

La justification de la valeur de $\frac{\xi}{\xi_0}$ sera effectuée ultérieurement par une analyse théorique plus précise.

3.4. Détermination de la puissance transmise maximale.

Les expériences précédentes montrent encore un niveau, à $B = 1\,\mathrm{Wb/m^2}$, sensiblement indépendant de la fréquence. Conformément à l'analyse effectuée au paragraphe 2.5, ceci implique qu'une large partie de l'atténuation de 20 à 25 dB restant est due à la désadaptation entre InSb et air.

L'expression de la puissance déterminée auparavant :

$$\frac{P_t}{P_i} = \left| \frac{1 + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}} \operatorname{sh}\left(j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}\,d\right) + \operatorname{ch}\left(j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}\,d\right) \right|^2$$

permet de déterminer, pour un produit μB donné la valeur maximale à attendre de $\frac{P_t}{P_i}$. En effet, sur un point de résonance dimensionnelle, pour μB assez grand :

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_c}\,d = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\left[1 - \frac{j}{2\mu B}\right]d \qquad \left(\varepsilon_1 = \frac{n\pi}{B\omega d}\right)$$

$$= p\pi\left(1 - \frac{j}{2\mu B}\right),$$

soit

$$\frac{P_t}{P_i} = \left| \frac{1 + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}}} \operatorname{sh}\left(\frac{p\pi}{2\mu B}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{p\pi}{2\mu B}\right) \right|^2.$$

L'adaptation conduit à réaliser la condition $\varepsilon = \varepsilon_c$; alors

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{1}{\left[\operatorname{sh}\frac{p\pi}{2\mu B} + \operatorname{ch}\frac{p\pi}{2\mu B}\right]^2} = e^{-\frac{p\pi}{\mu B}}.$$

Sachant qu'à 35 MHz, la résonance est obtenue expérimentalement à $B = 0{,}82\,\mathrm{Wb/m^2}$, la mobilité étant de $\mu = 6\,\mathrm{m^2/V.s}$, la perte doit pouvoir être ramenée à

$$10\log_{10} e^{\frac{p\pi}{\mu B}} \simeq 2{,}5\,\mathrm{dB}.$$

Compte tenu du fait qu'une perte de 3 dB supplémentaire due à l'excitation en polarisation rectiligne est inévitable, la perte de 70-43,5 = 26,5 dB observée avec le transformateur d'une spire et demie doit pouvoir être ramenée à 2,5 + 3 = 5,5 dB.

L'adaptation $\varepsilon = \varepsilon_c$ implique une action à la fois sur les parties réelle et imaginaire. Pour le réaliser expérimentalement, il a été utilisé un réglage « gros » consistant à faire varier le nombre de tours d'enroulements du transformateur et un réglage « fin » utilisant la technique d'adaptation par lignes, usuelle aux fréquences métriques (*fig.* 29).

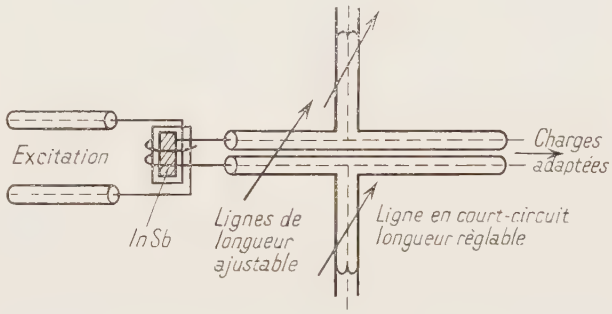


Fig. 29.

Le maximum de puissance transmise a alors été obtenu pour un transformateur de rapport 1, chaque enroulement comportant 15 spires et demie. Sans les éléments de lignes ajustables, la perte est alors de 11,5 dB; elle tombe à 8 dB en réglant les lignes. Comme il convient à un maximum de puissance par adaptation, le réglage est d'ailleurs assez flou. Il est ainsi trouvé un écart de 2,5 dB entre expérimentation et théorie. Pour que les deux coïncident, il faudrait, conformément à la figure 30, admettre que l'échantillon de InSb a une mobilité $\mu = 3{,}3\,\mathrm{m^2/V.s}$.

En conclusion de cette expérimentation « transformateur », il est donc possible d'affirmer :

L'expérimentation remet en évidence l'existence de l'effet « Hélicon » entre 10 et 700 MHz. Une première vérification quantitative est satisfaisante s'il est tenu compte d'une propagation en guide d'onde circulaire dans InSb.

Il reste à éclaircir cependant pourquoi la valeur propre ξ du guide d'onde est égale à

$$\xi = 2{,}65$$

et pourquoi la mobilité apparente μ est plus faible qu'annoncée. Ces deux points font l'objet de la vérification expérimentale suivante.

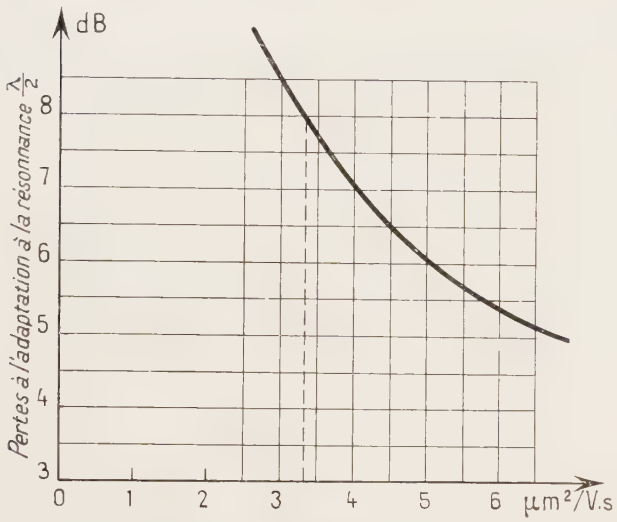


Fig. 30.

3.5. **Vérification sur coaxial. Principe de la mesure.**

Outre les résultats corrects qu'elle offre concernant l'effet « Hélicon », l'expérimentation « transformateur » a l'avantage de démontrer qu'il est inutile que les milieux précédant et suivant InSb soient capables d'accepter la propagation d'une onde polarisée circulairement. En effet, l'excitation est effectuée par l'intermédiaire de deux coaxiaux, ainsi que la sortie (*fig.* 25 et 29). En conséquence, il est possible d'amener l'onde plane d'excitation par un seul coaxial, InSb formant cette fois obstacle sur toute la surface où l'onde existe (*fig.* 31).

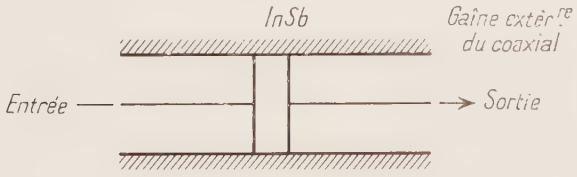


Fig. 31.

La réalisation pratique (*fig.* 32) s'écarte à peine du schéma de principe.

Tous les contacts sont assurés avec de la laque d'argent; les endroits où existe un contact sur InSb sont indiés par galvanoplastie au tampon. Il faut enfin signaler que le diamètre du guide d'onde étant plus petit que lors des expérimentations

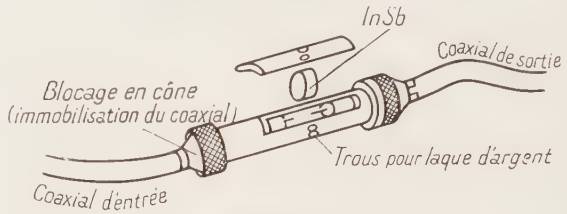


Fig. 32.

précédentes, il a été possible d'augmenter la valeur de B maximale en insérant dans l'électroaimant des pièces polaires cylindriques.

Une valeur de 1,5 Wb/m² a pu ainsi être obtenue.

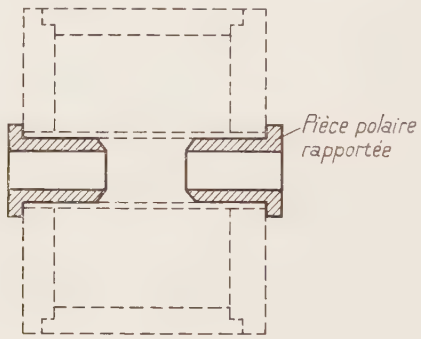


Fig. 33.

3.6. **Vérification sur coaxial. Résultats des mesures et leur interprétation.**

Les essais ont été effectués de 20 à 1000 MHz; les courbes obtenues ont toutes l'allure qui est maintenant bien connue; aussi ne sont extraits des résultats de mesure que ceux relatifs aux fréquences 45, 100, 300 et 825 MHz pour lesquelles les courbes théoriques de transfert de puissance ont été tracées.

Néanmoins, il faut tout de suite tenir compte de l'effective « température ambiante » de l'échantillon de InSb. Au moment de ces expérimentations sur coaxial, après 1 h 30 mn de stabilisation, la température au centre de l'électroaimant était de l'ordre de 12°,5 correspondant à

$$n = 1{,}45 \cdot 10^{13}/\mathrm{m}^3.$$

La figure 34 montre ainsi, superposées, les courbes théoriques et expérimentales.

En portant d'abord l'attention sur les résultats à 825 MHz, l'accord paraît excellent; en pratique,

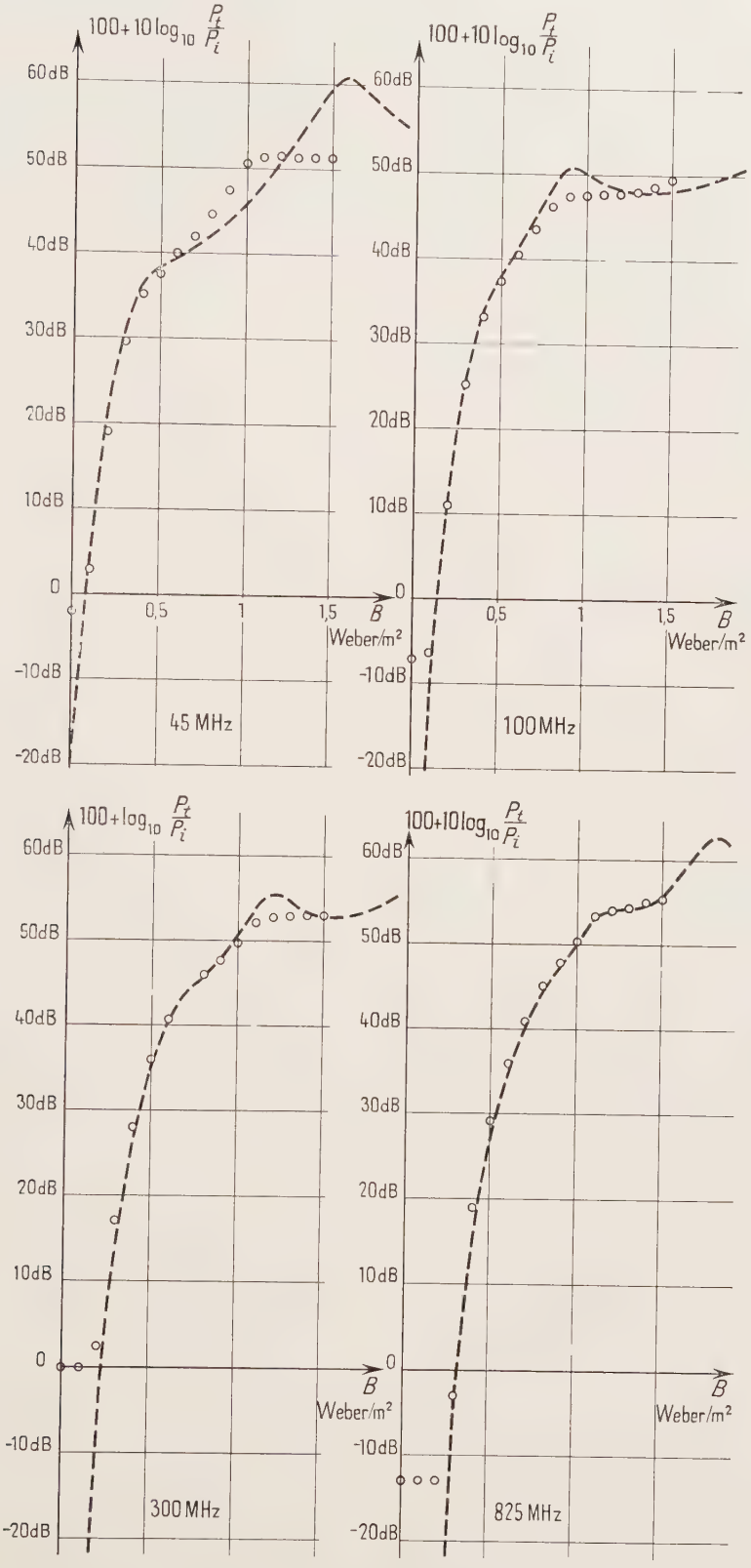


Fig. 34. — Expérimentation sur coaxial, $n = 1{,}45 \cdot 10^{22}/m^3$.

il faut considérer que la dynamique du phénomène s'étend sur un rapport de 1 à 10^7, ce qui impose l'échelle en décibels utilisée et qu'alors de faibles écarts vis-à-vis de la courbe théorique signifient des écarts importants exprimés directement en puissance. Néanmoins, à 825 MHz les écarts entre expérience et théorie sont de l'ordre de $\pm$ 0,5 dB soit environ $\pm$ 12 %, ce qui est très acceptable. Sur le flanc de courbe, l'écart atteint 3 dB, soit une erreur du simple au double, mais dans cette zone où la puissance varie dans un rapport de 1 à 10 pour une variation de B de quelques centaines de gauss, une telle erreur est facilement explicable. En définitive, l'accord entre théorie et expérience à 825 MHz peut vraiment être considéré comme excellent.

Pour les autres fréquences l'accord, correct aux faibles valeurs de B, devient mauvais si B croît; la valeur de B à partir de laquelle les points expérimentaux s'écartent de la courbe est d'autant plus basse que la fréquence est basse; simultanément, les extrémums expérimentaux s'écartent des valeurs théoriques et deviennent de plus en plus flous. Autrement dit, les mêmes phénomènes que lors de l'expérience « transformateur » apparaissent :

— décalage des positions de résonance;
— augmentation apparente des pertes.

Au moins en ce qui concerne le décalage des positions de résonance, une explication invoquant une propagation en guide d'ondes cylindrique a été invoquée. Dans le cas du coaxial, où la structure est simple, cette interprétation peut être explicitée ([6]).

Conformément à l'étude du paragraphe 1.3.1, il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\,\mathcal{E} = -j\omega\mu_0\mathcal{H}, \\ (\mathbf{rot}\,\mathcal{H}) = j\omega \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon' & 0 \\ -\varepsilon' & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} (\mathcal{E}). \end{cases}$$

La solution obtenue alors pour $\mathcal{E}_z = 0$ est, en coordonnées cylindriques :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{A} r^m e^{j(m+1)\varphi} e^{\gamma z} + \mathcal{B} r^m e^{-j(m+1)\varphi} e^{\gamma z}$$
$$\mathcal{E}_\varphi = j\mathcal{A} r^m e^{j(m+1)\varphi} e^{\gamma z} - j\mathcal{B} r^m e^{-j(m+1)\varphi} e^{\gamma z}$$

avec

$$\gamma_+^2 + \omega^2\mu_0(\varepsilon + j\varepsilon') = 0,$$
$$\gamma_-^2 + \omega^2\mu_0(\varepsilon - j\varepsilon') = 0,$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, constantes arbitraires.

([6]) Un travail analogue a été effectué par Suhl et Walker pour les milieux gyromagnétiques et les plasmas gazeux [15].

Dans le cas du coaxial, cette solution ne convient pas car $\mathcal{E}_\varphi \equiv 0$, $\forall z$ pour $r = R$ rayon du guide, implique $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} = 0$.

Il faut donc restituer la composante $\mathcal{E}_z$, donnant bien une propagation en guide d'ondes. En explicitant les équations de Maxwell en coordonnées cartésiennes et pour des solutions où la variable z apparaît en $e^{\gamma z}$:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \gamma\mathcal{E}_y = -j\omega\mu_0\mathcal{H}_x, \tag{8}$$

$$\gamma\mathcal{E}_x - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{E}_z = -j\omega\mu_0\mathcal{H}_y, \tag{9}$$

$$\frac{\partial x}{\partial}\mathcal{E}_y - \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_x = -j\omega\mu_0\mathcal{H}_z, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \gamma\mathcal{H}_y = j\omega\varepsilon\mathcal{E}_x + j\omega\varepsilon'\mathcal{E}_y, \tag{11}$$

$$\gamma\mathcal{H}_x - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_z = -j\omega\varepsilon'\mathcal{E}_x + j\omega\varepsilon\mathcal{E}_y, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{H}_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{H}_x) = j\omega\varepsilon_z\mathcal{E}_z. \tag{13}$$

Les équations (8), (9), (11) et (12) se remanient aisément pour exprimer $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$ en fonction de $\mathcal{E}_z$ et $\mathcal{H}_z$, soit

$$\begin{aligned} &[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon]\mathcal{E}_x + \omega^2\mu_0\varepsilon'\mathcal{E}_y \\ &\qquad = \gamma\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{E}_z] + j\omega\mu_0\frac{\partial}{\partial y}[\mathcal{H}_z] \\ &-\omega^2\mu_0\varepsilon'\mathcal{E}_x + [\gamma^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon]\mathcal{E}_y \\ &\qquad = \gamma\frac{\partial}{\partial y}[\mathcal{E}_z] - j\omega\mu_0\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{H}_z]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon]\mathcal{H}_x + \omega^2\mu_0\varepsilon'\mathcal{H}_y \\ &\qquad = \gamma\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{H}_z] + j\omega\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}[\mathcal{E}_z] - j\omega\varepsilon'\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{E}_z] \\ &-\omega^2\mu_0\varepsilon'\mathcal{H}_x + [\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon]\mathcal{H}_y \\ &\qquad = \gamma\frac{\partial}{\partial y}[\mathcal{H}_z] - j\omega\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{E}_z] - j\omega\varepsilon'\frac{\partial}{\partial y}[\mathcal{E}_z]. \end{aligned}$$

Soit en posant $\boldsymbol{\mathcal{E}}_T$ et $\boldsymbol{\mathcal{H}}_T$ les vecteurs champs électrique et magnétique transversaux, en utilisant les notations matricielles et notant $\mathbf{u}$ le vecteur unitaire dans la direction Oz :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon & \omega^2\mu_0\varepsilon' \\ -\omega^2\mu_0\varepsilon' & \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon \end{pmatrix}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_T) \\ &\qquad = -\gamma(\mathbf{grad}\,\mathcal{E}_z) - j\omega\mu_0(\mathbf{grad}\,\mathcal{H}_z \wedge \mathbf{u}), \\ &\begin{pmatrix} \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon & \omega^2\mu_0\varepsilon' \\ -\omega^2\mu_0\varepsilon' & \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon \end{pmatrix}(\boldsymbol{\mathcal{H}}_T) \\ &\qquad = \gamma(\mathbf{grad}\,\mathcal{H}_z) + j\omega\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon' \\ -\varepsilon' & \varepsilon \end{pmatrix}(\mathbf{grad}\,\mathcal{E}_z \wedge \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Cette solution est immédiatement comparable avec celle obtenue dans les milieux isotropes caractérisés par μ, ε :

$$[\gamma^2+\omega^2\mu\varepsilon]\boldsymbol{\mathcal{E}}_T = \gamma\,\mathbf{grad}\,\mathcal{E}_z - j\omega\mu[\mathbf{grad}\,\mathcal{H}_z\wedge\mathbf{u}],$$
$$[\gamma^2+\omega^2\mu\varepsilon]\boldsymbol{\mathcal{H}}_T = \gamma\,\mathbf{grad}\,\mathcal{H}_z + j\omega\varepsilon\,[\mathbf{grad}\,\mathcal{E}_z\wedge\mathbf{u}].$$

Comme dans le cas des milieux isotropes, le problème est donc ramené à la détermination des composantes $\mathcal{E}_z$ et $\mathcal{H}_z$; il suffit pour cela de tirer des équations précédentes les valeurs de $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{H}_z$, $\mathcal{H}_y$; d'en déduire celles de $\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{E}_y$, $\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_x$, $\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_y$, $\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_z$, et de reporter dans les équations (10) et (13) jusqu'ici inutilisées.

En notant D le déterminant

$$D=\begin{vmatrix}\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon & \omega^2\mu_0\varepsilon'\\ -\omega^2\mu_0\varepsilon' & \gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon\end{vmatrix},$$

il vient successivement :

$$D\mathcal{E}_x=\begin{vmatrix}\gamma\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{E}_z - j\omega\mu_0\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_z & \omega^2\mu_0\varepsilon'\\ \gamma\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_z + j\omega\mu_0\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_z & \gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon\end{vmatrix}\Rightarrow\quad D\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}$$
$$=\begin{vmatrix}\gamma\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\mathcal{E}_z - j\omega\mu_0\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathcal{H}_z & \omega^2\mu_0\varepsilon'\\ \gamma\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathcal{E}_z + j\omega\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\mathcal{H}_z & \gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon\end{vmatrix}.$$

$$D\mathcal{E}_y=\begin{vmatrix}\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon & \gamma\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{E}_z - j\omega\mu_0\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_z\\ -\omega^2\mu_0\varepsilon' & \gamma\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_z + j\omega\mu_0\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_z\end{vmatrix}\Rightarrow\quad D\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x}$$
$$=\begin{vmatrix}\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon & \gamma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{E}_z - j\omega\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\mathcal{H}_z\\ -\omega^2\mu_0\varepsilon' & \gamma\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\mathcal{E}_z - j\omega\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{H}_z\end{vmatrix}.$$

Soit

$$D\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{E}_y-\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_x\right]$$
$$=[\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon]\,j\omega\mu_0\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{H}_z+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathcal{H}_z\right]$$
$$+\omega^2\mu_0\varepsilon'\gamma\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{E}_z+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathcal{E}_z\right]$$

et en reportant dans l'équation (8) et notant Δ le laplacien

$$(14)\quad j\omega\mu_0[\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon]\,\Delta\mathcal{H}_z+\gamma\omega^2\mu_0\varepsilon'\Delta\mathcal{E}_z=-Dj\omega\mu_0\mathcal{H}_z.$$

Un calcul analogue donne pour l'équation (13) :

$$(15)\quad -\gamma\omega^2\mu_0\varepsilon'\Delta\mathcal{H}_z+j\omega[\varepsilon[\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon]+\varepsilon'\omega^2\mu_0\varepsilon']\Delta\mathcal{E}_z$$
$$=-Dj\omega\varepsilon_z\mathcal{E}_z,$$

les équations (14) et (15) sont facilement réécrites en isolant les laplaciens, ce qui donne

$$\Delta\mathcal{E}_z+\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}[\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon]\mathcal{E}_z=j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\mathcal{H}_z,$$
$$\Delta\mathcal{H}_z+\left[\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\omega^2\mu_0\varepsilon'\right]\mathcal{H}_z=j\gamma\omega\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\varepsilon_z\mathcal{E}_z.$$

Soit en notant (Δ) la matrice

$$\begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & \Delta\end{pmatrix},$$

$$(\Delta)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_z\\ \mathcal{H}_z\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}[\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon] & -j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\\ j\gamma\omega\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\varepsilon' & \gamma^2+\omega^2\mu_0\left[\varepsilon+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\varepsilon'\right]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{E}_z\\ \mathcal{H}_z\end{pmatrix}=0,$$

expression montrant que $\mathcal{E}_z=0$ $\mathcal{H}_z=0$ et réciproquement (7).

L'expression obtenue est encore à comparer avec le cas des milieux isotropes

$$(\Delta)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_z\\ \mathcal{H}_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon & 0\\ 0 & \gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{E}_z\\ \mathcal{H}_z\end{pmatrix}=0.$$

Le système d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre obtenu est analogue à un système différentiel du premier ordre où l'opérateur « dérivée » serait remplacé par l'opérateur « laplacien ». Il convient alors d'essayer la même méthode de résolution qui consiste à chercher à diagonaliser la matrice (A) de l'équation

$$(\Delta)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_z\\ \mathcal{H}_z\end{pmatrix}+(A)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_z\\ \mathcal{H}_z\end{pmatrix}=0.$$

Selon la méthode usuelle, cela revient à chercher les valeurs propres de (A) et à effectuer le changement de variables

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E}_z\\ \mathcal{H}_z\end{pmatrix}=(S)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},$$

où ψ_1 et ψ_2 sont les nouvelles fonctions inconnues et (S) une matrice carrée dont les colonnes sont formées de vecteurs propres de (A).

L'équation aux valeurs propres de (A) s'écrit :

$$\begin{vmatrix}\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}[\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon]-\lambda & -j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\\ j\gamma\omega\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\varepsilon' & \gamma^2+\omega^2\mu_0\left[\varepsilon+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\varepsilon'\right]-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

(7) Contrairement au cas des milieux isotropes, les modes T. E. et T. M. ne peuvent donc être distingués.

Soit

$$\lambda^2 - \left[\frac{\varepsilon_z + \varepsilon}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right] + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\omega^2\mu_0\varepsilon'\right]\lambda + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right]^2 + \left[\omega^2\mu_0\varepsilon'\right]^2\right] = 0.$$

Posons λ_1 et λ_2 les racines de cette équation. Les vecteurs propres correspondants de (A) sont donnés par

$$(A)\,(\mathbf{V}_i) = \lambda_i(\mathbf{V}_i) = \lambda_i\begin{pmatrix} V_i' \\ V_i'' \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2),$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right] & -j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \\ j\gamma\omega\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\varepsilon' & \gamma^2 + \omega^2\mu_0\left[\varepsilon + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\varepsilon'\right] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_i' \\ V_i'' \end{pmatrix} = \lambda_i\begin{pmatrix} V_i' \\ V_i'' \end{pmatrix}.$$

Comme les vecteurs propres sont définis à une constante multiplicatrice près, il suffit d'écrire la première ligne de l'égalité

$$\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right]V_i' - j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}V_i'' = \lambda_i V_i'$$

ce qui, pour $V_i' = 1$, impose

$$V_i'' = \frac{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right] - \lambda_i}{j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}.$$

Ainsi donc, la détermination de $\mathcal{E}_z$ et $\mathcal{H}_z$ se ramène à

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_z \\ \mathcal{H}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right] - \lambda_1}{j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} & \frac{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right] - \lambda_2}{j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

λ_1, λ_2 sont racines de

$$\lambda^2 - \left[\frac{\varepsilon_z + \varepsilon}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right] + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\omega^2\mu_0\varepsilon'\right]\lambda + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right]^2 + \left[\omega^2\mu_0\varepsilon'\right]^2\right] = 0.$$

ψ_1, ψ_2 sont données par

$$(\Delta)\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi donc $\mathcal{E}_z$ apparaît sous forme de deux fonctions ψ_1 et ψ_2 qui s'obtiennent en intégrant un système d'équations analogues à celui obtenu directement pour $\mathcal{E}_z$ et $\mathcal{H}_z$ dans le cas des milieux isotropes :

$$(\Delta)\begin{pmatrix} \mathcal{E}_z \\ \mathcal{H}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon & 0 \\ 0 & \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{E}_z \\ \mathcal{H}_z \end{pmatrix} = 0,$$

λ_1 et λ_2 jouent le rôle de $\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon$.

Or le produit $\lambda_1\lambda_2$ est égal à

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right]^2 + \left[\omega^2\mu_0\varepsilon'\right]^2\right] = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0(\varepsilon + j\varepsilon')\right]\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0(\varepsilon - j\varepsilon')\right]$$

et de même que la condition $\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon = 0$ (annulant les termes diagonaux dans l'équation au laplacien) donne la constante de propagation de l'onde T. E. M. pour le milieu isotrope, la condition

$$\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right]^2 + \left[\omega^2\mu_0\varepsilon'\right]^2 = 0$$

(donnant les constantes de propagation des ondes T. E. M. dans le milieu anisotrope) implique la nullité de λ_1 ou λ_2.

Associons

$$\lambda_1 \quad \text{à} \quad \gamma^2 + \omega^2\mu_0(\varepsilon + j\varepsilon'),$$
$$\lambda_2 \quad \text{à} \quad \gamma^2 + \omega^2\mu_0(\varepsilon - j\varepsilon'),$$

on en déduit (*) que dans la solution

$$\mathcal{E}_z = \underbrace{\psi_1}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\psi_2}_{(\mathrm{II})}$$

$$\mathcal{H}_z = \underbrace{\frac{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right] - \lambda_1}{j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}\psi_1}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\frac{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon\right] - \lambda_2}{j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}\psi_2}_{(\mathrm{II})}$$

le groupe (I) fournit les champs longitudinaux d'une onde qui, si le milieu grandit transversalement, tend vers l'onde T. E. M. de constante de propagation

$$\gamma'^2 = -\omega^2\mu_0(\varepsilon + j\varepsilon')$$

(qui donc est en fait réfléchie s'il n'y a pas de pertes) ( ).

De même le groupe (II) fournit les champs longitudinaux d'une onde qui tend vers l'onde T. E. M. qui se propage dans l'effet « Hélicon ».

Ce résultat, très utile par la suite, peut être traduit brutalement par :

ψ_1 représente l'onde atténuée de l'effet « Hélicon »,
ψ_2 représente l'onde transmise de l'effet « Hélicon ».

(*) *Cf.* Annexe V.

(*) *Cf.* la figure 1 de la première partie : $\varepsilon_c = \varepsilon + j\varepsilon'$ implique une constante diélectrique apparente < 0 pour l'effet « Hélicon ».

Pour arriver maintenant aux expressions des champs, il faut déterminer ψ_1 et ψ_2. La résolution de l'équation au laplacien donnant ψ_1 et ψ_2 est bien connue. En coordonnées cylindriques, il vient par séparation des variables

$$\psi_1 = \mathfrak{A}_1 J_m(\sqrt{\lambda_1} r)\, e^{jm\varphi},$$
$$\psi_2 = \mathfrak{A}_2 J_n(\sqrt{\lambda_2} r)\, e^{jn\varphi};$$

$\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, constantes arbitraires;

m, n, entiers pour la périodicité de 2π du système cylindrique;

J_m, fonction de Bessel de première espèce d'ordre m.

Pour obtenir l'équation permettant de fixer les modes propres du système, il faut exprimer les conditions aux limites

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_z &= 0 \\ \mathcal{E}_\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour } \quad r = R \quad \text{(rayon du guide)}.$$

Or

$$\mathcal{E}_z = \psi_1 + \psi_2 = \mathfrak{A}_1 J_m\left[\sqrt{\lambda_1} r\right] e^{jm\varphi} + \mathfrak{A}_2 J_n(\sqrt{\lambda_2} r)\, e^{jn\varphi}$$

et

$$\begin{vmatrix} \gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon & \omega^2 \mu_0 \varepsilon' \\ -\omega^2 \mu_0 \varepsilon' & \gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon' \end{vmatrix} \mathcal{E}_\varphi$$
$$= \begin{vmatrix} \gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon & \gamma \dfrac{\partial}{\partial r} \mathcal{E}_z - j\omega\mu_0 \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{H}_z \\ -\omega^2 \mu_0 \varepsilon' & \gamma \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{E}_z + j\omega\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial r} \mathcal{H}_z \end{vmatrix}.$$

Considérons d'abord la condition $\mathcal{E}_z = 0$ pour $r = R$; deux possibilités se présentent :

— la condition est satisfaite séparément par ψ_1 et ψ_2;

— la condition est satisfaite par la superposition de ψ_1 et ψ_2.

Premier cas :

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= 0 \\ \psi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour } \quad r = R.$$

alors

1° $\mathcal{E}_z(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} J_m(\sqrt{\lambda_1} R) &= 0; \\ J_n(\sqrt{\lambda_2} R) &= 0; \end{aligned}\right.$

2° $\mathcal{E}_\varphi(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ deux équations supplémentaires.

3° Equation du deuxième degré en $\lambda \quad \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\lambda_1(\gamma), \\ &\lambda_2(\gamma). \end{aligned}\right.$

Au total six équations pour déterminer trois variables λ_1, λ_2, γ. Il est immédiat de constater que ces six équations ne sont pas compatibles.

Deuxième cas :

$$\psi_1 = 0,$$
$$\psi_2 = 0.$$

Les six équations précédentes se ramènent à quatre, toujours pour les trois inconnues λ_1, λ_2, γ. Il est de nouveau immédiat de constater l'incompatibilité des équations.

Il est donc nécessaire de superposer ψ_1 et ψ_2 pour satisfaire les conditions au limites.

Ce point est très important car il implique que l'onde non atténuée (ψ_2) de l'effet « Hélicon » ne peut se propager dans le guide d'onde que si elle est accompagnée de l'onde atténuée (ψ_1).

Physiquement, les phénomènes peuvent être représentés comme suit :

— lorsque les dimensions transversales sont grandes devant l'épaisseur (infinies mathématiquement) l'onde ψ_2 se propage; sans atténuation en l'absence de collisions ($\mu \to \infty$), l'onde ψ_1 ne se propage pas du tout;

— lorsque les dimensions deviennent telles que la propagation en guide d'onde cylindrique apparaisse, l'onde ψ_2 a besoin de l'onde ψ_1 pour les conditions aux limites. Cela signifie simplement que ψ_2 étant à polarisation circulaire, il est nécessaire qu'il existe au voisinage des parois une onde à polarisation circulaire en sens inverse, la superposition des deux donnant la polarisation rectiligne imposée par le conducteur extérieur. Pour pouvoir se propager ψ_2 est maintenant contrainte de « transfuser » continuellement une partie de son énergie à ψ_1 pour permettre à cette dernière de subsister malgré l'atténuation qu'elle subit dans le milieu. En conséquence ψ_2 qui ne subissait aucune atténuation va maintenant en subir une, imposée par les conditions limites.

Autrement dit :

Même si le milieu est sans pertes pour l'onde « Hélicon » T. E. M. qui se propage, l'atténuation cesse d'être nulle en propagation guide d'onde en raison de la nécessité d'une polarisation rectiligne sur les parois du guide.

Si le milieu est à pertes, ces dernières ne peuvent qu'augmenter. Ce fait explique pourquoi dans l'expérimentation « transformateur » la mobilité apparente n'est que de 3,3 au lieu de 6 à 35 MHz; la détérioration apparente de μ est aussi visible sur les courbes de la figure 34 : à 825 MHz, la correction « guide d'onde » est faible et la courbe expérimentale superposée à la courbe théorique « $\mu = 6$ »; lorsque

la fréquence décroît, le niveau obtenu sur les résonances est plus faible que prévu théoriquement et l'acuité de la résonance diminuée (le coefficient de qualité est, rappelons-le, chiffré par le produit μB).

Troisième cas :

$$\psi_1 + \psi_2 = 0 \qquad \text{pour} \quad r = R.$$

Ceci est possible à condition que

$$m = n,$$

$$\mathcal{A}_1 J_m(\sqrt{\lambda_1} R) + \mathcal{A}_2 J_m(\sqrt{\lambda_2} R) = 0,$$

soit

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{A}\left[\frac{J_m(\sqrt{\lambda_1} r)}{J_m(\sqrt{\lambda_2} R)} - \frac{J_m(\sqrt{\lambda_2} r)}{J_m(\sqrt{\lambda_2} R)}\right] e^{jm\varphi},$$

ce qui assure l'annulation de $\mathcal{E}_z$ pour $r = R$ quelles que soient les valeurs de λ_1, λ_2; γ.

L'équation $\mathcal{E}_\varphi = 0$ pour $r = R$ va alors permettre de déterminer les modes propres des ondes ψ_1 et ψ_2. Cette condition s'écrit :

$$\frac{\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon}{-\omega^2 \mu_0 \varepsilon'} = \frac{\gamma \dfrac{\partial}{\partial r}(\mathcal{E}_z) - j\omega\mu_0 \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(\mathcal{H}_z)}{\gamma \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(\mathcal{E}_z) + j\omega\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial r}(\mathcal{H}_z)} \qquad \text{pour} \quad r = R.$$

Posons, pour simplifier les écritures

$$\mathcal{H}_z = A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2, \qquad \text{avec} \quad A_{i\,i=1,2} = \frac{\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon}[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon] - \lambda_i}{j\gamma\omega\mu_0 \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}}$$

la condition s'écrit alors

$$\frac{\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon}{j\omega\varepsilon'} = \frac{\left\{\gamma\left[\sqrt{\lambda_1}\dfrac{J'_m[\sqrt{\lambda_1}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_1}R]} - \sqrt{\lambda_2}\dfrac{J'_m[\sqrt{\lambda_2}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_2}R]}\right] + \dfrac{m\omega\mu_0}{R}[A_1 - A_2]\right\}}{A_1\sqrt{\lambda_1}\dfrac{J'_m[\sqrt{\lambda_1}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_1}R]} - A_2\sqrt{\lambda_2}\dfrac{J'_m[\sqrt{\lambda_2}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_2}R]}},$$

où

$$J'_m(u) = \frac{d[J_m(u)]}{du}.$$

Cette expression prend une forme plus simple en séparant les termes relatifs à ψ_1 et ψ_2 :

$$\left[\frac{\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon}{j\omega\varepsilon'}A_2 - \gamma\right]\sqrt{\lambda_2}\frac{J'_m[\sqrt{\lambda_2}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_2}R]} + \frac{m}{j\gamma R}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\lambda_2$$

$$= \text{même expression avec les indices 1.}$$

En remplaçant enfin A_i par $\dfrac{j\gamma\omega\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\varepsilon'}{\lambda_i - \left[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\left(\varepsilon + \dfrac{\varepsilon'^2}{\varepsilon}\right)\right]}$

et en tenant compte des relations entre coefficients et racines de l'équation en λ, il faut finalement résoudre le système suivant à trois inconnues γ, λ_1, λ_2 :

$$\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\frac{\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon}{\lambda_2} - 1\right]\sqrt{\lambda_2}\frac{J'_m[\sqrt{\lambda_2}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_2}R]} + j\frac{m}{R}\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon'}{\lambda_2}$$

$$= \text{même expression avec indices 1,}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon}{\varepsilon}[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon] + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\omega^2\mu_0\varepsilon',$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}[(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon)^2 + (\omega^2\mu_0\varepsilon')^2].$$

Cet ensemble est assez rébarbatif, surtout si l'on considère qu'il faut travailler avec des fonctions de Bessel de variables complexes. Une façon de le résoudre pratiquement consiste à chercher une solution approchée puis à procéder numériquement par itération à partir de cette valeur approchée. Pour ce faire, il est temps d'expliciter les termes à partir de

$$\varepsilon \neq \frac{ne^2\tau}{j\omega m}\frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2} = \frac{ne\mu}{j\omega}\frac{1}{1+\mu^2B^2},$$

$$\varepsilon' \neq -\frac{ne^2\tau}{j\omega m}\frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} = -\frac{ne\mu}{j\omega}\frac{\mu B}{1+\mu^2B^2},$$

$$\varepsilon_z \neq \frac{ne^2\tau}{j\omega m} = \frac{ne\mu}{j\omega},$$

$$\gamma = -[\alpha + j\beta]$$

pour mettre en évidence termes réel et complexe de γ.

λ_1 et λ_2 sont alors fournis par

$$\lambda_1 + \lambda_2 = [2 + \mu^2B^2][\alpha^2 - \beta^2] + 2j[\alpha\beta(2 + \mu^2B^2) - \omega\mu_0 ne\mu],$$

$$\lambda_1\lambda_2 = [1 + \mu^2B^2][(\alpha^2 - \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2] - \omega\mu_0 ne\mu[\omega\mu_0 ne\mu e - 4\alpha\beta] - 2j[\alpha^2 - \beta^2][\omega\mu_0 ne\mu - 2\alpha\beta(1 + \mu^2B^2)].$$

En espace libre, la constante de propagation est donnée par

$$\gamma^2 = [\alpha^2 - \beta^2] + 2j\alpha\beta$$

$$= -\omega^2\mu_0\varepsilon_C \neq -\omega^2\mu_0\left[\frac{ne}{B\omega}\left(\frac{1}{1 + \dfrac{j}{\mu B}}\right)\right]$$

$$= -\omega\mu_0 ne\mu\left[\frac{\mu B}{1+\mu^2B^2} - j\frac{1}{1+\mu^2B^2}\right]$$

et donc

$$2\alpha\beta = \frac{\omega\mu_0 ne\mu}{1+\mu^2B^2}.$$

Cette valeur peut être gardée comme départ pour l'obtention de la solution à partir de laquelle l'itération s'effectuera; elle offre l'avantage d'annuler

le terme imaginaire de $\lambda_1\lambda_2$; en outre, le terme imaginaire de la somme devient négligeable devant le terme réel; en effet, pour

$$2\alpha\beta = \frac{\omega\mu_0 ne\mu}{1+\mu^2B^2},$$

$$\lambda_1+\lambda_2 = [2+\mu^2B^2][\alpha^2-\beta^2] - j\frac{\mu^2B^2}{1+\mu^2B^2}\omega\mu_0 ne\mu$$

et le terme complexe est négligeable devant le terme réel si

$$[2+\mu^2B^2][\alpha^2-\beta^2] \gg \frac{\mu^2B^2}{1+\mu^2B^2}\omega\mu_0 ne\mu.$$

Or l'ordre de grandeur de β^2 est connu : en espace libre,

$$\beta^2 \# -[\alpha^2-\beta^2] = \omega\mu_0 ne\mu\frac{\mu B}{1+\mu^2B^2}$$

dans le guide d'onde β^2 sera certes inférieur à cette valeur, soit

$$\beta^2 = \frac{1}{x}\omega\mu_0 ne\mu\frac{\mu B}{1+\mu^2B^2},$$

x coefficient >1 dépendant des dimensions du guide d'onde et du mode excité.

Il faut donc que

$$[2+\mu^2B^2]\frac{1}{x}\omega\mu_0 ne\mu\frac{\mu B}{1+\mu^2B^2} \gg \frac{\mu^2B^2}{1+\mu^2B^2}\omega\mu_0 ne\mu,$$

soit

$$\frac{2+\mu^2B^2}{\mu B} \geq x.$$

Or x reste toujours petit; dans les expériences faites il n'atteint jamais 3 selon les résultats expérimentaux. De toute façon, l'expression indique que pour μB assez grand, ce qui est la condition d'existence « confortable » de l'effet « Hélicon », l'approximation est bonne.

Ceci permet de ramener le problème à des variables réelles, puisque pour

$$2\alpha\beta = \frac{\omega\mu_0 ne\mu}{1+\mu^2B^2},$$

on a

$$\lambda_1+\lambda_2 = [2+\mu^2B^2][\alpha^2-\beta^2],$$

$$\lambda_1\lambda_2 = [1+\mu^2B^2][\alpha^2-\beta^2]^2 - \frac{\mu^2B^2}{1+\mu^2B^2}(\omega\mu_0 ne\mu^2).$$

Remarquons tout d'abord que somme et produit de λ_1 et λ_2 sont <0. Pour la somme cela est évident car α reste inférieur à β pour une propagation correcte. Pour le produit il suffit de remplacer $\alpha^2-\beta^2$ par sa valeur déterminée quelques lignes auparavant

$$\alpha^2-\beta^2 = -\frac{1}{x}\omega\mu_0 ne\mu\frac{\mu B}{1+\mu^2B^2},$$

soit

$$\lambda_1\lambda_2 = [\omega\mu_0 ne\mu]^2\left[\frac{\mu^2B^2}{1+\mu^2B^2}\frac{1}{x^2} - \frac{\mu^2B^2}{1+\mu^2B^2}\right]$$

$$= [\omega\mu_0 ne\mu]^2\frac{\mu^2B^2}{1+\mu^2B^2}\left[\frac{1}{x^2}-1\right] \leq 0 \qquad \text{car } x \geq 1.$$

λ_1 et λ_2 sont donc de signes contraires, la plus grande en module étant négative. Lorsqu'on tend vers la propagation en espace libre $x \to 1$, $\lambda_1\lambda_2 \to 0$, $\lambda_1+\lambda_2$ reste <0, c'est donc la racine >0 qui correspond à l'onde « Hélicon » de l'espace libre, c'est-à-dire en fait à celle qui transporte l'énergie dans le guide d'onde; à cette onde a été attachée conventionnellement la valeur λ_2 précédemment; donc

$$\lambda_2 \to 0 \qquad (\sqrt{\lambda_2} \text{ réel}),$$

$$\lambda_1 < 0 \qquad (\sqrt{\lambda_1} \text{ imaginaire pur}).$$

Notons enfin l'ordre de grandeur de λ_1. Quand $\lambda_2 = 0$ (espace libre) :

$$\lambda_1 = -[2+\mu^2B^2]\omega\mu_0 ne\mu\frac{\mu B}{1+\mu^2B^2}.$$

En se plaçant alors à la fréquence la plus basse utilisée (10 MHz), pour $\mu = 6\text{m}^2/\text{V.s}$, $B = 0{,}5$ Wb/m^2, avec $n = 1{,}45.10^{22}/\text{m}^3$:

$$\lambda_1 \# -3{,}6.10^6 \qquad \sqrt{\lambda_1} = j.1{,}9.10^3.$$

Cet ordre de grandeur reste valable dans le guide d'onde pour lequel :

$$\lambda_1 \# -[2+\mu^2B^2]\beta^2 - \lambda_2,$$

la diminution de β^2 étant contrebalancée par la variation de λ_2.

Cet ordre de grandeur de λ_1 permet une grande simplification dans l'équation contenant les fonctions de Bessel; il faut en effet calculer

$$\sqrt{\lambda_1}\frac{J'_m[\sqrt{\lambda_1}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_1}R]}.$$

Or $\sqrt{\lambda_1}R$ est de l'ordre de

$$j.1{,}9.10^3 \times 6{,}35.10^{-3} = j.6{,}35;$$

pour une telle valeur de la variable, il est très licite d'utiliser les développements asymptotiques des fonctions de Bessel :

$$J_m(\sqrt{\lambda_1}R) = J_m(+j\sqrt{|\lambda_1|}R) \# j^m\frac{e^{\sqrt{|\lambda_1|}R}}{\sqrt{2\pi\sqrt{|\lambda_1|}R}},$$

$$J'_m(\sqrt{\lambda_1}R) = \frac{1}{2}[J_{m-1}(\sqrt{\lambda_1}R) - J_{m+1}(\sqrt{\lambda_1}R)]$$

$$\# -j.j^m\frac{e^{\sqrt{|\lambda_1|}R}}{\sqrt{2\pi\sqrt{|\lambda_1|}R}},$$

soit

$$\frac{J'_m[\sqrt{\lambda_1}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_1}R]} = -j.$$

En tenant compte de tous ces résultats, le système d'équations déterminant γ, λ_1, λ_2, devient

$$\frac{J'_m[\sqrt{\lambda_1}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_1}R]} = \frac{[1+\mu^2B^2][\alpha^2-\beta^2]-\lambda_1}{[1+\mu^2B^2][\alpha^2-\beta^2]-\lambda_2}\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{m}{R}\mu B\omega\mu_0 ne\mu\frac{\sqrt{\lambda_2}}{(1+\mu^2B^2)(\alpha^2-\beta^2)-\lambda_2}\left[\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right],$$

$$\lambda_1+\lambda_2 = (2+\mu^2B^2)(\alpha^2-\beta^2).$$

$$\lambda_1\lambda_2 = (1+\mu^2B^2)(\alpha^2-\beta^2)^2 - \frac{\mu^2B^2}{1+\mu^2B^2}(\omega\mu_0 ne\mu)^2.$$

$$2\alpha\beta(1+\mu^2B^2) = \omega\mu_0 ne\mu.$$

Ce système est cette fois abordable pour une résolution graphique relativement simple. Pour cela il est possible de le ramener à un ensemble où ne figurent plus comme inconnues que λ_1 et λ_2 en éliminant α et β. Cette élimination est simple et conduit à

$$\frac{J'_m[\sqrt{\lambda_2}R]}{J_m[\sqrt{\lambda_2}R]} = \frac{(1+\mu^2B^2)\lambda_2-\lambda_1}{(1+\mu^2B^2)\lambda_1-\lambda_2}\frac{\sqrt{\lambda_2}}{j\sqrt{\lambda_1}} - \frac{m}{R}\mu B\frac{[2+\mu^2B^2]\sqrt{\lambda_2}}{[1+\mu^2B^2]\lambda_1-\lambda_2}\omega\mu_0 ne\mu\left[\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right],$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{1+\mu^2B^2}{[2+\mu^2B^2]^2}[\lambda_1+\lambda_2]^2 - \frac{\mu^2B^2}{1+\mu^2B^2}(\omega\mu_0 ne\mu)^2.$$

La valeur de λ_1 en fonction de λ_2 est à tirer de la deuxième équation, le report dans la première équation autorisant une résolution graphique complète du système.

Il n'est bien entendu pas question de fournir la solution générale, l'ensemble dépendant :

— de la fréquence par ω;

— du semi-conducteur par n, μ;

— de la façon dont l'effet « Hélicon » est favorisé (valeur de B);

— du guide d'onde par R;

— de la nature de l'onde électromagnétique d'excitation par m.

Mais on peut au moins le résoudre dans les conditions de l'une de ces expériences précédentes. Prenons celle du transformateur à 35 MHz, où l'accord entre théorie et expérience a imposé une valeur, assez arbitraire alors, de

$$\xi = 2{,}65$$

comme racine de l'équation aux modes propres du guide d'onde.

Les conditions de l'expérimentation sont :

— résonance à $B = 0{,}82$ Wb/m^2;

— $n = 1{,}27.10^{22}$/m^3 (température de 60°,5); $\mu = 6$m^2/V.s.

Le choix de m dépend de la nature de l'onde d'excitation. Dans le cas particulier, la situation est des plus complexes en raison de la présence de deux bobinages croisés et des ondes évanescentes correspondant à la réflexion de la moitié de l'énergie incidente. La figure 35 représente la résolution graphique pour $m = 0, 1, 2$. Les résultats suivants concernant les premiers modes en sont déductibles.

	$\sqrt{\lambda_2}R$.	β(m^{-1}).	α(m^{-1}).
$m = 0$.	0	815	82
	3,83	705	94,9
	6,99	516	129,5
	9,9	340	196,5
$m = 1$.	5,03	635	105
	8,1	460	145
$m = 2$.	6,12	573	117
	9,15	386	173

Éliminant la valeur $\sqrt{\lambda_2}R = 0$ qui correspond à l'onde T. E. M. dans le milieu illimité, le mode dominant est caractérisé par

$$m = 0, \qquad \sqrt{\lambda_2}R = 3{,}83, \qquad \beta = 705 \text{ m}^{-1},$$

cette valeur est effectivement très proche de la valeur expérimentale

$$\beta = \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{4{,}32}10^3 = 727 \text{ m}^{-1}.$$

Par rapport à l'espace illimité sans pertes, elle correspond à une valeur du paramètre ξ [10] égale à

$$-\beta^2 + \omega^2\mu_0\frac{ne}{B\omega} = \left(\frac{\xi}{R}\right)^2,$$

soit avec les valeurs numériques précédentes :

$$\xi = 2{,}75.$$

[10] De la formule

$$f = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mu_0 ne d^2}\left[(2q+1)^2 + \left(\frac{\xi}{\pi}\frac{d}{R}\right)^2\right]B.$$

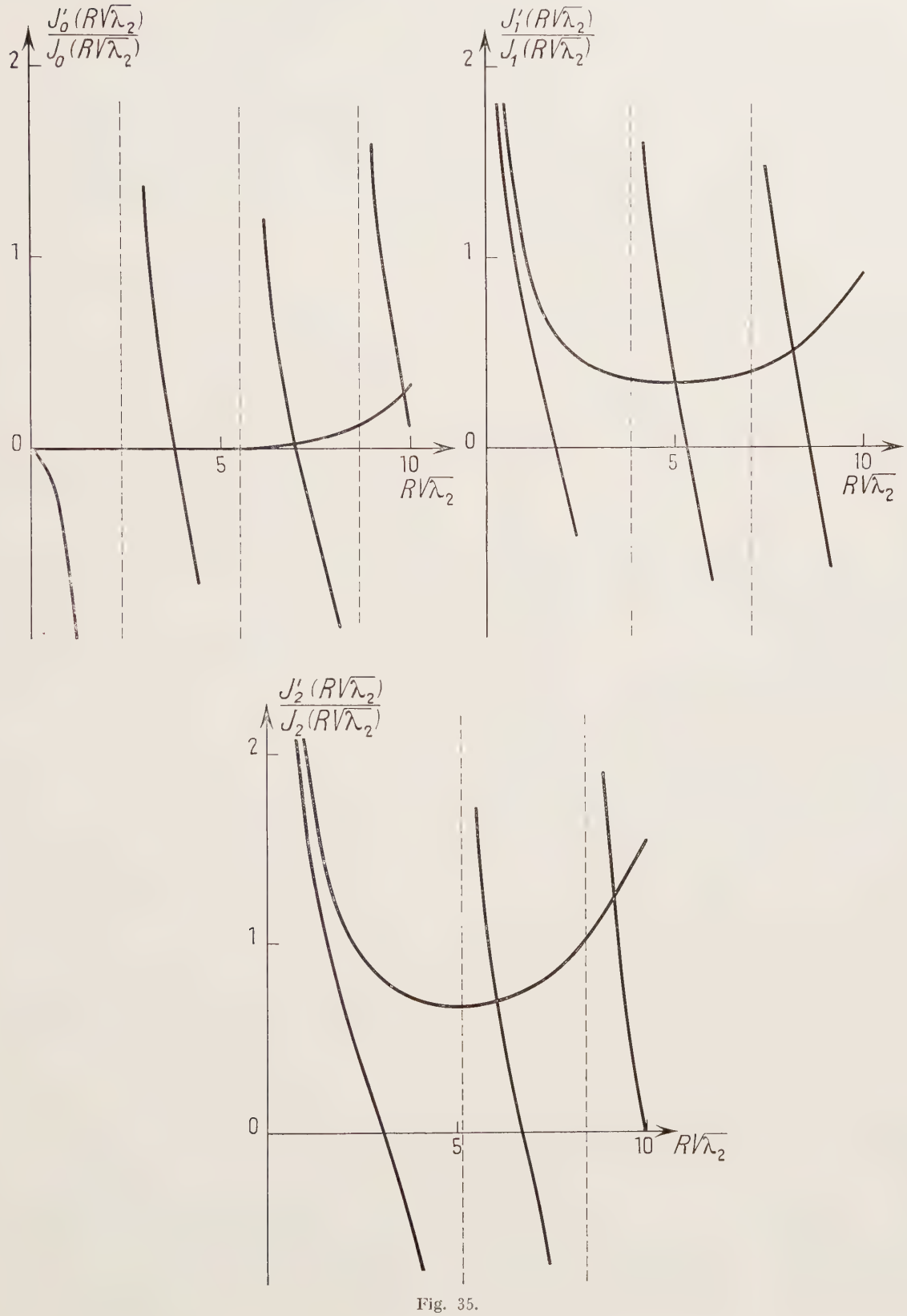

$\frac{J_0'(R\sqrt{\lambda_2})}{J_0(R\sqrt{\lambda_2})}$
2
1
0
5
10
$R\sqrt{\lambda_2}$
$\frac{J_1'(R\sqrt{\lambda_2})}{J_1(R\sqrt{\lambda_2})}$
2
1
0
5
10
$R\sqrt{\lambda_2}$
$\frac{J_2'(R\sqrt{\lambda_2})}{J_2(R\sqrt{\lambda_2})}$
2
1
0
5
10
$R\sqrt{\lambda_2}$

Fig. 35.

en excellent accord avec la valeur expérimentale ($\xi = 2{,}65$), expliquant pourquoi la correction « guide d'onde » appliquée un peu arbitrairement lors de l'expérience « transformateur » était satisfaisante.

L'éclaircissement de ce dernier point permet de conclure, avec l'ensemble des résultats théoriques et expérimentaux précédents, à l'existence de l'effet « Hélicon » dans la gamme des ondes métriques et décamétriques et à la validité de la formulation mathématique qui en a été donnée.

4. APPLICATION A LA RÉALISATION D'UN ISOLATEUR. DÉVELOPPEMENTS ULTÉRIEURS POSSIBLES.

4.1. Principe de l'application envisagée.

L'analogie formelle déjà soulignée entre l'effet « Hélicon » et les phénomènes gyromagnétiques dans les ferrites conduit naturellement à chercher à réaliser un isolateur. Or le guide d'onde le mieux approprié à la gamme de fréquence envisagée (10 à 1000 MHz) est le guide coaxial. Il faut donc chercher à réaliser sur guide coaxial une polarisation circulaire électrique et choisir entre les trois types usuels d'isolateurs :

— à absorption;
— à déplacement de champ;
— à déphasage.

Or la courbe donnant parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique apparente en fonction de l'induction magnétique est pratiquement symétrique par rapport à l'axe des ordonnées pour le terme imaginaire. Le maximum de pertes est donc situé sur cet axe et l'isolateur par absorption est irréalisable.

La constante diélectrique (partie réelle) étant positive ou négative suivant le sens de polarisation, l'isolateur à déplacement de champ est *a priori* réalisable et pourrait être essayé dans un développement ultérieur; mais, dans le cas présent, c'est l'isolateur à déphasage qui apparaît comme le mieux adapté au problème. En résumé, il faut donc :

— réaliser une polarisation circulaire électrique au guide coaxial;

— utiliser deux voies de transmission (*fig.* 36) dont l'une est à déphasage variable selon le sens de propagation, amplitude et phase étant ajustées pour que les tensions transmises par chaque voie s'ajoutent ou se détruisent suivant le sens de propagation.

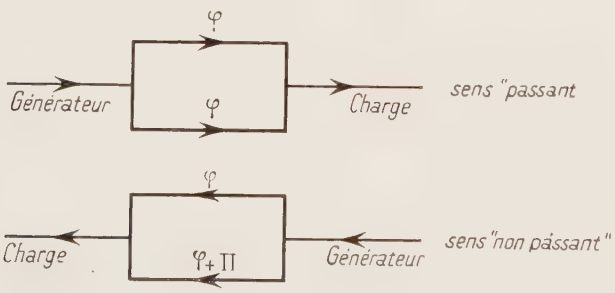


Fig. 36.

4.2. Réalisation d'une polarisation circulaire électrique.

Pour minimiser les pertes d'insertion, l'échantillon de InSb sera utilisé au voisinage de la résonance dimensionnelle en $\frac{\lambda_m}{2}$. Il y a donc inversion de phase lors de la traversée de l'échantillon. Pour assurer un bon couplage entre l'onde incidente et InSb, la structure de circuit cherchée a donc été déterminée sur les deux critères :

— déphasage de π de la tension transmise;
— réalisation de deux tensions en quadrature.

Ces buts peuvent être atteints par une technique de circuit à constantes localisées en utilisant une cellule de transmission en π comme indiqué sur la figure 37.

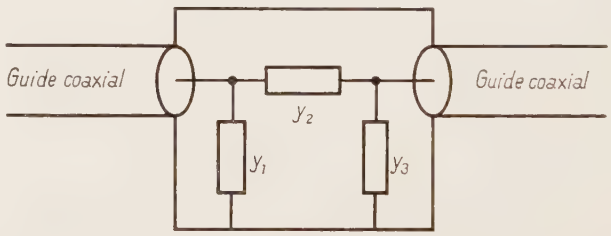


Fig. 37.

La théorie usuelle des quadripôles donne le rapport de la tension de sortie $\mathcal{V}_2$ à la tension d'entrée $\mathcal{V}_1$:

$$\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = \frac{y_2}{y_2 + y_3 + y_u},$$

y_u, admittance de charge du quadripôle.

Or y_u est la charge ramenée par le coaxial de sortie supposé adapté sur son impédance caractéristique R_c; donc y_u est réel. La condition d'opposition de phase s'écrit alors

$$\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = -A \qquad (A \text{ nombre réel} > 0),$$

soit

$$y_2 = -A(y_2 + y_3) - A y_a,$$

égalité impossible si y_2 et y_3 sont imaginaires purs, ce qui est imposé pour éviter les pertes. Il faudra donc mettre deux cellules en cascade, soit une rotation de phase de 90° par cellule en prenant deux cellules identiques. En adoptant enfin des cellules itératives, il faut donc que

$$\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = \quad A = \frac{\quad y_2}{y_2 + y_a + y_c},$$

$y_c = y_a = \frac{1}{R_c}$, admittance caractéristique du guide coaxial; soit

$$y_2 = -j(y_2 + y_3) - j y_c$$

et comme y_2 et y_3 sont imaginaires purs :

$$y_2 = \quad j y_c,$$
$$y_2 + y_3 = 0.$$

Pour que la cellule soit itérative il faut en outre que

$$y_c = y_1 + \frac{y_2(\quad + y_c)}{y_2 + y_3 + y_c}$$
$$= y_1 + \frac{-j y_c(y_c - j y_c)}{y_c} = y_1 + y_c - j y_c,$$

soit

$$y_1 = j y_c.$$

Le schéma de principe de cellule est celui représenté sur la figure 38.

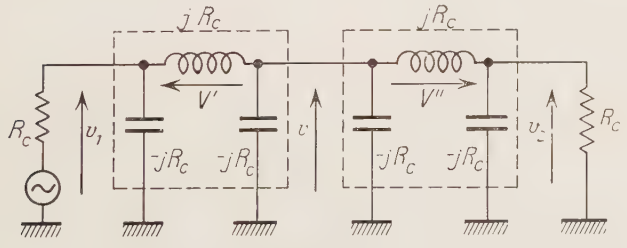


Fig. 38.

Schéma dans lequel il est *postulé qu'il n'y a aucun couplage entre les deux inductances.* Ce point particulier, très important pour la suite, peut être réalisé en bobinant les selfs à angle droit l'une de l'autre, au moins en principe. Montrons en outre que les tensions V' et V'' aux bornes des inductances (*fig.* 39) sont en quadrature; il suffit pour cela de tracer le diagramme de Fresnel, sachant que :

$\mathcal{V}$ est d'amplitude égale à $\mathcal{V}_1$, mais déphasée de $\frac{\pi}{2}$ en retard (cellule itérative, déphasage de 90°);

$\mathcal{V}_2$ est d'amplitude égale à $\mathcal{V}$, mais déphasée de $\frac{\pi}{2}$ en retard;

$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V} + V''$;

$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} + V'$.

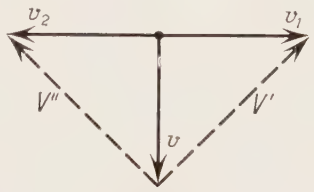


Fig. 39.

Les bobinages étant par ailleurs réalisés à angle droit, il est ainsi créé localement deux tensions perpendiculaires et en quadrature. Pratiquement, il suffit de réaliser les bobinages à angle droit sur l'échantillon de InSb conformément au schéma de la figure 40, l'induction magnétique étant perpendiculaire au plan de la figure.

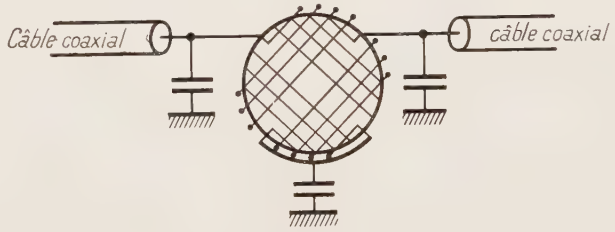


Fig. 40.

InSb se trouve ainsi naturellement placé en un endroit où la polarisation électrique est circulaire. Pour le bon sens de polarisation et d'induction magnétique, InSb se présente alors comme un diélectrique placé dans deux bobinages croisés et ne perturbe pas le milieu, tout du moins en première approximation. En inversant le sens de l'induction magnétique ou celui de la propagation, la constante diélectrique apparente devient négative et InSb perturbe violemment le milieu. Le raisonnement approximatif suivant peut alors être donné : sous l'influence de la rotation des électrons dans InSb

due à l'induction magnétique extérieure un couplage est créé entre les deux inductances et ce couplage modifie la transmission de l'énergie par les cellules LC de façon à retrouver aux bornes des inductances, mutuelles comprises, des tensions en quadrature (mais de phase opposée à la première expérience). Pour obtenir l'annulation de l'énergie à la sortie, il suffit de créer un couplage extérieur supplémentaire de manière à annuler la tension résultante de sortie. L'expérience montre qu'un tel couplage est réalisé à l'aide d'une simple capacité en tête C_T entre les deux inductances.

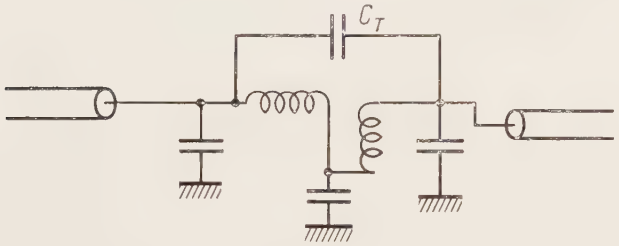


Fig. 41.

Ce procédé a en outre l'avantage d'inclure dans C_T les inévitables capacités parasites de couplage entre enroulements.

4.3. **Réalisation pratique de l'expérimentation et résultats.**

Le schéma de principe final est donc celui représenté sur la figure 42.

Pour les indispensables réglages expérimentaux, il est plus pratique de faire varier la valeur de R que la valeur de L, ceci à l'aide de la technique déjà utilisée et bien connue par ailleurs des tronçons de lignes d'adaptation. Par la même technique, C peut être rendu réglable. C' et C_T sont constitués par de simples condensateurs ajustables, adaptés à la fréquence de travail choisie (30 MHz pour

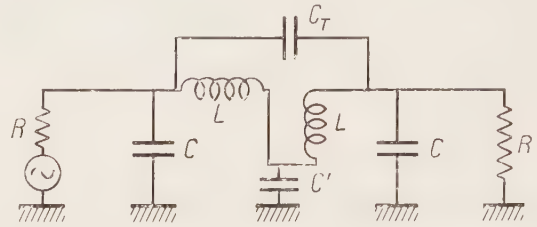


Fig. 42.

obtenir la résonance $\frac{\lambda}{2}$ à une valeur convenable de l'induction magnétique). Le dispositif expérimental retenu est donc le suivant, l'induction magnétique B étant obtenue par un électroaimant de laboratoire du commerce (entrefer : 1 cm).

La figure 44 donne les résultats expérimentaux obtenus. L'échantillon de InSb est celui utilisé tout au long des expérimentations précédentes sur l'effet « Hélicon », la self-inductance L est constituée de 14 spires équidistantes, $C_T = 8$pF, $C' = 3{,}5$pF.

L'isolateur obtenu a donc les caractéristiques suivantes :

Fréquence de travail : 30 MHz;
Induction magnétique : 0,8 Wb/m^2;
Température : ambiante;
Perte d'insertion : 1,7 dB;
Atténuation en inverse : 70 dB.

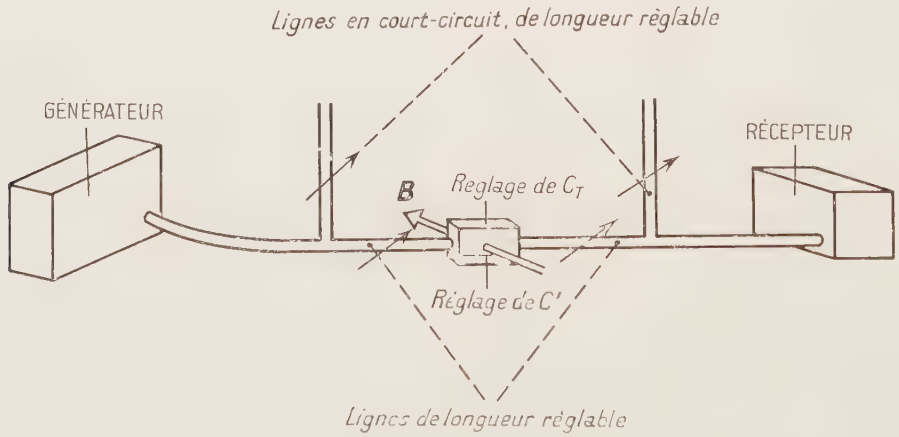


Fig. 43.

La bande passante est de l'ordre de 10 % (± 3MHz) pour une perte d'insertion de 3 dB, l'atténuation en inverse restant supérieure à 30 dB.

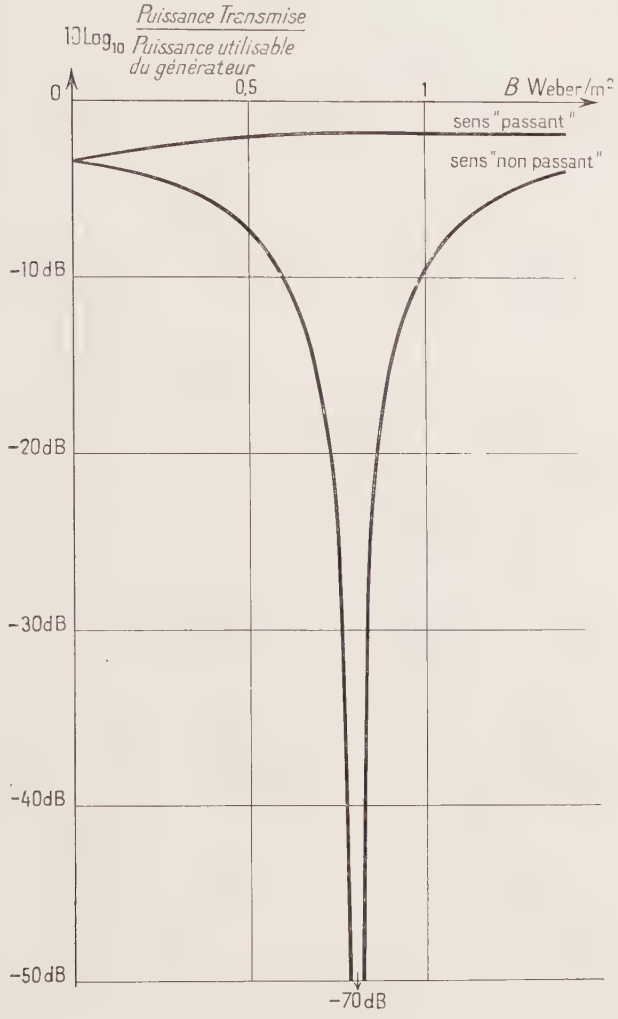


Fig. 44. — Réalisation d'un isolateur.

4.4. **Développements ultérieurs possibles.**

La première continuation naturelle des travaux précédents consistera à examiner l'influence des divers paramètres du montage isolateur sur les performances, puis à étendre les résultats jusqu'à la fréquence la plus haute techniquement réalisable (300 à 1000 MHz ?). Parallèlement d'autres types d'isolateurs pourront être imaginés et expérimentés.

En possession d'isolateurs bien au point, la réalisation d'un circulateur en vue d'une utilisation avec les amplificateurs paramétriques du type à « résistance négative » pourra être essayée.

Un abaissement des pertes d'insertion peut être espéré à la température de l'azote liquide. En particulier, l'application de l'effet « Hélicon » à 3 000 et 10 000 MHz, dans l'azote liquide pourrait éventuellement concurrencer avantageusement les ferrites.

Enfin, une étude analogue à celle qui vient d'être faite de 10 à 1000 MHz devrait être envisagée dans le domaine des ondes millimétriques. En repassant en revue les conditions d'existence de l'effet « Hélicon » (*cf.* Ire partie) :

$$\omega_c \gg \omega,$$
$$\omega_c \tau \gg 1,$$
$$\frac{ne}{B\omega} \gg \varepsilon_R$$

il est facile de vérifier qu'elles peuvent être vérifiées disons à 100 000 MHz; en effet :

$$\omega_c \gg \omega \quad \Rightarrow \quad B \ll \frac{m}{e}\omega,$$

soit à 100 000 MHz pour InSb, $B \ll 0{,}05$ Wb/m² quelle que soit la température;

$$\omega_c \tau \gg 1 \qquad \mu B \gg 1$$

qui est indépendant de la fréquence;

$$\frac{ne}{B\omega} \gg \varepsilon_R \qquad B \ll \frac{ne}{\varepsilon_R \omega},$$

soit à 100 000 MHz, InSb intrinsèque, température ambiante : $B \leqslant 28$ Wb/m²; soit à 100 000 MHz, InSb, 77°K, $n = 10^{20}$/m³, $B \ll 0{,}16$ Wb/m².

Cette dernière valeur est défavorable, mais correspond à un nombre de porteurs égal à $n = 10^{20}$/m³. Il suffirait de prendre $n = 10^{21}$/m³ pour retrouver une marge de sécurité convenable.

Outre ces applications évidentes, l'effet « Hélicon » pourra être utilisé dans toute application où il est nécessaire de rendre transparent un semi-conducteur (par exemple multiplication de fréquence par effet non linéaire lié aux électrons chauds) ou réciproquement de faire agir un semi-conducteur comme un miroir quasi parfait ($\varepsilon < 0$).

L'effet peut en outre être recherché sur d'autres corps, ainsi qu'il a été fait pour le tellurure de plomb [13].

Enfin la superposition d'un champ électrique constant conduit théoriquement à une possibilité d'amplification de l'onde « Hélicon » transmise par un effet analogue à celui utilisé dans les tubes à ondes progressives [14]. Cet effet pourra être étudié si l'on arrive à résoudre les difficultés présentées par la puissance considérable qui est alors dégagée dans l'échantillon.

ANNEXE V.

Objet de l'annexe V.

Le but est de démontrer que dans l'expression générale des solutions des équations de Maxwell dans le milieu anisotrope étudié au paragraphe 3.6, la solution limite obtenue lorsque $\psi_1 \to 0$, $\psi_2 \to 0$, $\lambda_1 \to 0$ correspond à l'onde T. E. M.

Expression de la solution « onde T. E. M. ».

Elle s'obtient à partir des équations (8) à (13) dans lesquelles

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{H}_z = 0.$$

Alors il existe une solution non identiquement nulle si

$$[\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon]^2 +]\omega^2 \mu_0 \varepsilon'^2 = 0$$

et

$$\mathcal{E}_y = -\frac{\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon'} \mathcal{E}_x = \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon'}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon} \mathcal{E}_x = \mp j \mathcal{E}_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{E}_y - \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_x = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{E}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_y = 0.$$

Les équations aux dérivées partielles sont vérifiées par

$$\mathcal{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

avec

$$\Delta V = 0.$$

Comme

$$-\gamma \mathcal{E}_y = -j\omega\mu_0 \mathcal{H}_x,$$
$$\gamma \mathcal{E}_x = -j\omega\mu_0 \mathcal{H}_y,$$

la solution générale « T. E. M. » cherchée s'écrit, en notations vectorielles, $\mathbf{u}$ étant le vecteur unitaire dans la direction de propagation :

$$(\mathrm{A}.3)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_T = -\mathbf{grad}\, V, \\ \mathcal{H}_T = j\dfrac{\gamma}{\omega\mu_0}[\mathbf{u} \wedge -\mathbf{grad}\, V]. \\ \mathcal{E}_z = \mathcal{H}_z = 0, \\ \Delta V = 0. \\ [\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon]^2 + [\omega^2 \mu_0 \varepsilon']^2 = 0. \end{cases}$$

Solution générale.

Il a été montré dans la troisième partie (p. 242 et 244), que dans le cas général où $\mathcal{E}_z$ et $\mathcal{H}_z$ sont différents de zéro, la solution s'écrit

$$(\mathrm{A}.4)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon & \omega^2\mu_0\varepsilon' \\ -\omega^2\mu_0\varepsilon' & \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon \end{pmatrix} (\mathcal{E}_T) \\ \quad = \gamma(\mathbf{grad}\,\mathcal{E}_z) - j\omega\mu_0(\mathbf{grad}\,\mathcal{H}_z \wedge \mathbf{u}), \\ \begin{pmatrix} \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon & \omega^2\mu_0\varepsilon' \\ -\omega^2\mu_0\varepsilon' & \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon \end{pmatrix} (\mathcal{H}_T) \\ \quad = \gamma(\mathbf{grad}\,\mathcal{H}_z) + j\omega \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon' \\ -\varepsilon' & \varepsilon \end{pmatrix} (\mathbf{grad}\,\mathcal{E}_z \wedge \mathbf{u}), \\ \begin{pmatrix} \mathcal{E}_z \\ \mathcal{H}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \dfrac{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon] - \lambda_1}{j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}} & \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & \\ \dfrac{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}[\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon] - \lambda^2}{j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Avec ψ_1, ψ_2 solutions de

$$(\Delta)\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0$$

et λ_1, λ_2 solutions de

$$\lambda^2 - \left[\frac{\varepsilon_z + \varepsilon}{\varepsilon}(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon) + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\omega^2\mu_0\varepsilon'\right]\lambda + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}[(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon)^2 + (\omega^2\mu_0\varepsilon')^2] = 0.$$

Il faut donc montrer que (A.4) $\to$ (A.3) lorsque ψ_1; ψ_2; $\lambda_1 \to 0$, λ_2 restant différent de zéro, ou plus simplement, que la solution particulière

$$\psi_2 = 0$$

tend à la limite vers l'onde plane T. E. M. lorsque λ_1 et $\psi_1 \to 0$.

Explicitons cette solution particulière; à l'aide de calculs algébriques simples, les champs sont donnés par

$$\begin{cases} \gamma\frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\lambda_1\lambda_2\mathcal{E}_x = [(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon)(\gamma^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_z) + \omega^2\mu_0\varepsilon\lambda_1]\frac{\partial\psi_1}{\partial x} \\ \qquad - \left[\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'}(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon)^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon'\gamma^2 \right. \\ \qquad \left. - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon)\lambda_1\right]\frac{\partial\psi_1}{\partial y}, \\ \gamma\frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\lambda_1\lambda_2\mathcal{E}_y = \left[\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'}(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon)^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon'\gamma^2 \right. \\ \qquad \left. - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon)\lambda_1\right]\frac{\partial\psi_1}{\partial x} \\ \qquad + [(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon)(\gamma^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_z) \\ \qquad + \omega^2\mu_0\varepsilon\lambda_1]\frac{\partial\psi_1}{\partial y}, \\ \mathcal{E} = \psi_1; \end{cases}$$

$$\gamma\frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\lambda_1\lambda_2\mathcal{H}_x=\frac{\gamma}{j\omega\mu_0}\left[\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'}(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)^2+\omega^2\mu_0\varepsilon'\gamma^2-\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)\lambda_1\right]\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}$$
$$+\frac{\gamma}{j\omega\mu_0}\left[-\omega^2\mu_0(\varepsilon+\varepsilon_z)(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)-(\omega^2\mu_0\varepsilon')^2-\omega^2\mu_0\varepsilon\lambda_1\right]\frac{\partial\Psi_1}{\partial y},$$

$$\gamma\frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\lambda_1\lambda_2\mathcal{H}_y=\frac{\gamma}{j\omega\mu_0}\left[\omega^2\mu_0(\varepsilon+\varepsilon_z)(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)+(\omega^2\mu_0\varepsilon')^2-\omega^2\mu_0\varepsilon\lambda_1\right]\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}$$
$$+\frac{\gamma}{j\omega\mu_0}\left[\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'}(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)^2+\omega_2\mu_0\varepsilon'\gamma^2-\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)\lambda_1\right]\frac{\partial\Psi_1}{\partial y},$$

$$\mathcal{H}_z=\frac{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon\right]-\lambda_1}{j\gamma\omega\mu_0\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}\Psi_1.$$

Pour retrouver à la limite l'onde T. E. M., il suffit de poser

$$\psi_1=\lambda_1\Phi_1,\qquad\text{avec}\quad\lim\Phi_1\neq 0$$

lorsque λ_1 tend vers zéro, Φ_1 vérifiant la même équation aux dérivées partielles que Ψ_1, cette dernière n'étant définie qu'à une constante multiplicatrice près; lorsque $\lambda_1\to 0$, $\Psi_1\to 0$; $\mathcal{E}_z$ et $\mathcal{H}_z\to 0$.

Par ailleurs, il existe une limite finie $\neq 0$ pour $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$, donnée par

$$\gamma\frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\lambda_2\mathcal{E}_x=\left[(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)(\gamma^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_z)\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}-\left[\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'}(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)^2+\omega^2\mu_0\varepsilon'\gamma^2\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial y},$$

$$\gamma\frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\lambda_2\mathcal{E}_y=\left[\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)^2+\omega^2\mu_0\varepsilon'\gamma^2\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)(\gamma^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_z)\frac{\partial\Phi_1}{\partial y},$$

$$\gamma\frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\lambda_2\mathcal{H}_x=\frac{\gamma}{j\omega\mu_0}\left[\left[\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'}(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)^2+\omega^2\mu_0\varepsilon'\gamma^2\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}-\left[\omega^2\mu_0(\varepsilon+\varepsilon_z)(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)+(\omega^2\mu_0\varepsilon')^2\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right],$$

$$\gamma\frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\lambda_2\mathcal{H}_y=\frac{\gamma}{j\omega\mu_0}\left[\left[\omega^2\mu_0(\varepsilon+\varepsilon_z)(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)+(\omega^2\mu_0\varepsilon')^2\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\left[\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'}(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)^2+\omega^2\mu_0\varepsilon'\gamma^2\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right].$$

Cet ensemble représente l'onde T. E. M. cherchée s'il existe V tel que

$$\mathcal{E}_x=a\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}-b\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x},$$
$$\mathcal{E}_y=b\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+a\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\mathcal{H}_x=\frac{\gamma}{j\omega\mu_0}\left[b\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}-\alpha\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right]=\frac{\gamma}{j\omega\mu_0}\mathcal{E}_y.$$
$$\mathcal{H}_y=\frac{\gamma}{j\omega\lambda_0}\left[a\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+b\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right]=\frac{-\gamma}{j\omega\mu_0}\mathcal{E}_x.$$

a, b, α donnés par l'identification avec les équations précédentes; V devant vérifier

$$\Delta V=0$$

et γ être tel que

$$(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)^2+(\omega^2\mu_0\varepsilon')^2=0$$

Or l'identification portant sur $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ impose

$$a\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\,\partial y}-b\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}=b\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\,\partial y}\quad\left(\frac{\partial V}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y\,\partial x}\right),$$
$$a\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y\,\partial x}+b\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}=0\qquad(\Delta V=0).$$

Ceci implique

$$\Delta\Phi_1=0.$$

Or

$$\Delta^{\Phi_1}+\lambda_1\Phi_1=0,$$

soit à la limite

$$\lambda_1=0,\qquad\Delta\Phi_1=0.$$

L'identification portant sur $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_y$ implique

$$a=-\alpha.$$

c'est-à-dire

$$(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)(\gamma^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_z)=-\omega\mu_0(\varepsilon+\varepsilon_z)(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)-(\omega^2\mu_0\varepsilon')^2,$$

soit

$$(\gamma^2+\omega^2\mu_0\varepsilon)^2+(\omega^2\mu_0\varepsilon')^2=0$$

qui est bien l'équation donnant la constante de propagation de l'onde T. E. M. La quadrature entre $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ découle de cette relation, ainsi qu'il est rapide de le vérifier en en tenant compte dans les expressions précédentes.

Ainsi se trouve démontré qu'à la limite, les ondes ψ_1 et ψ_2 tendent vers les ondes transmise et réfléchie de l'effet « Hélicon » suivant le mode transversal électrique et magnétique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. Aigrain, *Proceedings of the International Conference on Semi-conductor Physics*, Prague, 1960; Czechoslovakian, Academy of Sciences, Prague, 1961.

[2] R. Bowers, C. Legendy et F. Rose, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 7, n° 9, 1961, p. 739.

[3] R. G. Chambers et B. K. Jones, *Proc. Roy. Soc.*, vol. 270, 1962, p. 417.

[4] A. Libchaber et R. Veilex, *Phys. Rev.*, vol. 127, 1962, p. 774.

[5] Hilsum et A. C. Rose-Innes, *Semi-conducting III-V compounds International Series of Monographs on Semi-conductors*, vol. 1, Pergamon Press.

[6] D. K. Stevens et J. M. Crawford, *Phys. Rev.*, vol. 99, 1955, p. 487.

[7] Cotti, Wyder et Quattropani, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 1, 1962, p. 50.

[8] Bitter, *Rev. Sc. Instr.*, December 1936.

[9] A. Libchaber et R. Veilex, *Proceedings of the International Conference on the Physics of Semi-conductors*, Exeter, July 1962, p. 138.

[10] J. Grémillet, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 2792.

[11] J. Grémillet, *C. R. Acad. Sc.*, t. 257, 1963, p. 2258.

[12] J. Grémillet, *C. R. Acad. Sc.*, t. 257, 1963, p. 2431.

[13] Yasuo Kanai, *Japanese J. Appl. Phys.*, vol. 2, n° 3, 1963, p. 137.

[14] J. Bok et P. Nozieres, *J. Phys. Chem. Solids*, vol. 4, n° 6, 1963, p. 709.

[15] H. Suhl et L. R. Walker, *Bell Syst. Techn. J.*, vol. 33, 1954, n° 3, p. 579; n° 4, p. 939 et n° 5, p. 1133.

[16] R. Veilex, *Thèse de doctorat d'État*, Université de Paris, 18 février 1964.

ABRIDGMENT.

PROPAGATION OF METRIC AND DECAMETRIC WAVES IN SEMI-CONDUCTORS IN THE PRESENCE OF A DIRECT CURRENT MAGNETIC FIELD, " HELICON " EFFECT

By J. Grémillet. p. 122.

Part I analyzes the theoretical properties of anisotropic propagation of electromagnetic waves in semi-conductors in the presence of direct current magnetic induction.

This analysis is made on the basis of the Drude-Zener model of free electrons in the crystal lattice and applies the fundamental dynamics equation to a particle whose mass can be represented by a matrix. Maxwell's equations show the existence of an apparent matrix dielectric constant. The solution is then obtained for the case in which the relaxation time of the electric charge carriers is long (high mobility semi-conductors); making use of the fact that the matrix which represents the apparent dielectric constant is then of Hermitian type, it is shown that the solution of Maxwell's equations may be found in the form of two plane waves with inverse elliptical polarization, and for which the medium has an apparent scalar dielectric constant which depends on the sense of polarization.

These dielectric constants are then examined in detail for the special case in which the apparent mass of the carriers is scalar and in which the superimposed direct current magnetic induction is at right angles to the plane of polarization of the waves. It is then shown that the apparent dielectric constant of the material is either positive or negative depending on the sense of polarization of the circularly polarized wave (" Helicon " effect).

The conditions of validity of these results are examined in the special case of Indium antimonide, In Sb, a material which possesses very high electron mobility.

In Part II, on the basis of the preceding results, experiments are carried out with the object of verifying the theoretical results qualitatively. The principle makes use of a guided wave whose polarization can be varied at will, this wave being incident on a cylindrical sample of In Sb whose thickness is chosen for multiple half-wave resonance at the various working frequencies.

The wave-guide consists of a screened four-wire line and the tests were made at 30 to 1000 Mc/s, first with linear polarization, then with central circular polarization with a view to verifying the existence of the predicted effect.

In a further article a series of more precise experiments permitting a quantitative comparison between experiment and theory is described. Then, on the basis of the results obtained, an example of practical application is given in the form of an isolator working with good performance at 35 Mc/s, at room temperature.

PROPAGATION OF METRIC AND DECAMETRIC WAVES IN SEMI-CONDUCTORS IN THE PRESENCE OF DIRECT CURRENT MAGNETIC INDUCTION, " HELICON " EFFECT

(Part two)

By J. Grémillet. p. 232

In a previous article the general theory of anisotropic electromagnetic wave propagation effects in high mobility semi-conductors subjected to a direct current magnetic induction (" Helicon " effect) was given, and an experimental verification was described.

The interpretation of the results obtained confirms the predicted existence of two apparent scalar dielectric constants, positive or negative depending on the direction of circular polarization of the incident wave, but experimental data are difficult to obtain on account of the enormous value of the apparent relative dielectric constant (some 10^5). The experiments described in this article aim at improving measurement conditions to a sufficient degree of precision for a quantitative comparison of experiment with theory. This comparison leads to the setting out of the theory of electromagnetic wave propagation in a cylindrical waveguide filled with anisotropic material consisting of the semi-conductor. Excellent agreement is obtained over the whole range of measurement extending from 10 to 1000 Mc/s.

The above results are applied by designing an isolator making use of the effect in question. With this in mind, a description is given of means for producing circular polarization in a coaxial waveguide, as well as of means for coupling to the anisotropic material consisting of a cylindrical wafer of indium antimonide, In Sb. At room temperature, insertion loss is about 1.7 dB at 35 Mc/s, for intrinsic In Sb and direct current magnetic induction of 0.82 W/m^2.

Attenuation in the non-transmitting direction is over 30 dB for a frequency band of $\pm$ 15 %, with an insertion loss not greater than 3 dB. By careful design this type of isolator should be capable of use in the metric band.

Lastly, the article reviews a few possible applications of the Helicon effect and shows that it remains basically applicable down to the millimetric range.

ZUSAMMENFASSUNG.

FORTPFLANZUNG DER KURZWELLEN UND ULTRAKURZWELLEN IN DEN HALBLEITERN IN ANWESENHEIT EINES MAGNETISCHEN GLEICHFELDES. « HELICON-EFFEKT »

Von J. Grémillet. S. 122.

In einem ersten Teil werden die theoretischen Eigenschaften der Fortpflanzungsanisotropie der elektromagnetischen Wellen in den Halbleitern bei Vorhandensein eines Gleichmagnetfeldes untersucht. Diese Untersuchung geht von dem Modell von Drude-Zener mit freien Elektronen innerhalb des Kristallgitters aus und sie greift auf die Grundgleichung der Dynamik zurück, die an ein Teilchen angewandt wird, dessen Masse durch eine Matrix dargestellt werden kann. Wenn man dabei die Maxwell'schen Gleichungen schreibt, kommt formell eine matritzenbedingte, scheinbare dielektrische Konstante zum Vorschein. Die Lösung der Gleichung wird dabei vorgenommen für den Fall, wo die Lebensdauer der Ladungsträger gross ist (Halbleiter mit grosser Beweglichkeit der Ladungsträger). Wenn man dann die Tatsache auswertet, dass die Matrize, welche die scheinbare dielektrische Konstante darstellt, eine hermitesche Matrize ist, kann man zeigen, dass die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen zwei ebenen Wellen entspricht, die gegensinning elliptisch polarisiert sind und für welche der Werkstoff eine skalare scheinbare dielektrische Konstante aufweist, deren Wert von dem Polarisationssinn abhängt. Diese scheinbaren dielektrischen Konstanten werden dann eingehender untersucht in dem besonderen Fall, wo die scheinbare Masse der Ladungsträger eine skalare grösse ist, und wo das Gleichmagnetfeld senkrecht zur Polarisationsebene der Wellen steht. Es wird dann gezeigt, dass die scheinbare skalare dielektrische Konstante des Werkstoffes entweder positiv oder negativ ist, je nach der Polarisationsrichtung der zirkular polarisierten Welle (« Helicon-Effekt »). Dann werden die Gültigkeitsbedingungen dieser Resultate im besonderen Fall des Indium-Antimonids InSb, ein Werkstoff welcher durch eine sehr grosse Beweglichkeit, der Elektronen gekennzeichnet ist, behandelt.

Ausgehend von den obigen Resultaten wird in einem zweiten Teil eine Versuchsreihe aufgestellt, um diese theoretischen Resultate qualitativ zu überprüfen. Das Prinzip der Arbeitsweise besteht in dem Einsatz einer geführten Welle, deren Polarisation auf Wunsch verändert werden kann, die auf einer InSb-Platte auftrifft, deren Stärke derart berechnet ist, dass sie bei den verschiedenen Betriebsfrequenzen als Halbwellenresonator arbeitet. Für die Führung der Wellen verwendet man eine Vieraderleitung unter einem Schirm und die Versuche werden bei Frequenzen zwischen 30 und 1000 MHz ausgeführt, zuerst mit linearpolarisierten Wellen und dann mit im Mittelpunkt zirkular polarisierten Wellen. Das Vorhandensein des vorhergesagten Vorganges konnte durch diese Versuche bestätigt werden.

In einem späteren Aufsatz wird eine genauere Versuchsreihe beschrieben, welche eine quantitative Gegenüberstellung der Messergebnisse und der Theorie ermöglichen. Ausgehend von den erhaltenen Resultaten wird dann ein praktisches Anwendungsbeispiel gegeben, in Form eines Isolators, welcher mit guten Leistungen bei Umgebungstemperatur und einer Betriebsfrequenz von 35 MHz arbeitet.

FORTPFLANZUNG DER KURZWELLEN UND ULTRAKURZWELLEN IN DEN HALBLEITERN IN ANWESENHEIT EINES MAGNETISCHEN GLEICHFELDES-« HELICON-EFFEKT »

(Teil 2)

Von J. Grémillet. S. 232

In einem ersten Aufsatz wurde die allgemeine Theorie der Fortpflanzungsanisotropie der elektromagnetischen Wellen aufgestellt, die in einem Halbleiter mit grosser Ladungsträgerbeweglichkeit einem Gleichmagnetfeld ausgesetzt sind (« Helicon-Effekt ") und es wurde die qualitative experimentelle Bestätigung diese Vorganges beschrieben. Die Auswertung der Messresultate bestätigt, wie vorgesehen, das Vorhandensein zweier scheinbarer skalarer dielektrischer Konstanten, welche respektive positive bzw. negative Werte aufweisen, je nach dem Polarisationssinn der zirkular polarisierten einfallenden Welle; die Messdaten werden aber nur mit grossen Schwierigkeiten erhalten, und zwar infolge der enormen Grösse der relativen scheinbaren dielektrischen Konstante (mehrere 10^5). Die in diesem Aufsatz beschriebenen Versuchsreihen haben den Zweck, die Messbedingungen zu verbessern, um eine genügende Präzision erhalten zu können, um die quantitative Gegenüberstellung der Messwerte und der Rechenwerte vornehmen zu können. Für diese Gegenüberstellung wird man dazu geführt, die Theorie der Fortpflanzung der elektromagnetischen Wellen in einem zylindrischen Hohlleiter, welcher von dem anisotropen Halbleiterwerkstoff ausgefüllt wird, eingehend zu untersuchen. Man findet eine tadellose Uebereinstimmung in dem gesamten Messbereich von 10 bis 1000 MHz.

In Anwendung der erhaltenen Resultate wird dann ein Isolator ausgelegt, welcher die untersuchte Erscheinung verwendet. Dazu werden zunächst die Mittel beschrieben, um eine elektrische zirkulare Polarisation in einer Koaxialleitung zu erhalten, sowie die Einrichtungen zum Ankoppeln des dielektrischen Werkstoffes, welcher aus einer zylindrischen Scheibe aus Indium-Antimonid In Sb besteht. Bei der Umgebungstemperatur beträgt die Einschaltdämpfung etwa 1.7 dB bei 35 MHz, und zwar für In Sb mit einer Eigenleitung und bei einem magnetischen Gleichfeld von 0.82 W/m^2. Die Dämpfung in Sperrichtung bleibt grösser als 30 dB in einem Frequenzband von ± 15 %, wobei die Einschaltdämpfung nirgends über 3 dB beträgt. Bei günstiger technologischer Ausbildung dürfte ein Isolator dieser Type einwandfrei im Kurzwellenbereich betrieben werden können.

Zum Schluss gibt dieser Aufsatz eine Uebersicht über die möglichen Anwendungen des « Helicon »-Effektes, wobei gezeigt wird, dass dieser Effekt bis in das Bereich der Millimeterwellen anwendbar ist.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Phénomènes tourbillonnaires dans les supraconducteurs

Vu et approuvé :

Paris, le 3 février 1964.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & Cie
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

167639-64

Dépôt légal, Imprimeur, 1964, nº 1684.

Imprimé en France

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & Cie
Quai des Grands-Augustins, 55.
167639-64

Dépôt légal, Imprimeur, 1964, n° 1684.

Imprimé en France.